CINVESTAV

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N.

Generalización de los Conceptos de Testor y Testor Típico para Entornos Difusos.

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias.

con especialidad en Ing. Eléctrica.

opción en Computación.

PRESENTA:

Ing. Salvador Godoy Calderón.

México D.F. Junio 1996

AGRADECIMIENTOS

A los Dioses, por la vida.

A mi Madre, por su eterno apoyo.

A mi Padre,
por introducirme en en camino de la ciencia.

a Manuel Lazo,
por creer en mí.

a Javier Díaz y Francisco Loyo,
por ser más que amigos, mis verdaderos hermanos.

a Alejandra Franco,
por su eterna compañía.

a Martha Ortíz,
por todos los momentos compartidos.

Muy Especialmente.

a Raúl Irena Estrada,

porque al pasar el tiempo, sigue siendo el modelo y la luz que guía mis acciones, mis temores, mis juicios y mis logros.

RESUMEN.

En este trabajo se desarrollan dos nuevas definiciones de Testor para problemas con clases difusas y una nueva definición de Tipicidad en los testores. Para desarrollar estas definiciones se formaliza primero el concepto de Cubrimiento adaptándolo al contexto del Reconocimiento de Patrones y generando una definición nueva con propiedades especiales. El estudio de las principales características de los cubrimientos permite formalizar, desde un nuevo enfoque, los problemas clásicos de Clasificación Supervisada, Parcialmente Supervisada y No-Supervisada, así como el problema de Selección de Rasgos. El planteamiento de las condiciones esperadas en un Cubrimiento Ideal (Condición de Discriminación y Condición de Caracterización) nos lleva a crear el concepto de Cohesión de un cubrimiento. Por otra parte, se modela a los testores como el resultado de la comparación entre dos cubrimientos, esta visión genera la definición de una nueva familia de testores llamados Δ-Testores que, entre otras características, son los primeros en tomar en cuenta el grado de semejanza entre descripciones de objetos en un cubrimiento con clases difusas. El nuevo concepto de tipicidad permite optimizar varias relaciones de orden consideradas en un orden jerárquico.

PALABRAS CLAVE : Reconocimiento de Patrones, Enfoque Lógico-Combinatorio, Teoría de Testores, Entornos Difusos.

ABSTRACT.

Two new definitions of Testor for problems with fuzzy classes and a new definition for Typicality in Testors are developed in this work. In order to develop these definitions, first, the Covering concept is formalized, adapting it to the Pattern Recognition context, thus generating a new definition with special properties. The study of the main characteristics of the coverings enables the formalization, under a new perspective, of the classical problems known as Supervised, Partially Supervised and Non-Supervised Classification, as well as of the Features Selection problem. Setting forth of the conditions expected in an Ideal Covering of the Discriminating Condition and Characterization Condition type leads to the creation of Cohesion of a Covering. Likewise, Testors are modeled as a result of comparing two coverings. This view generate the definition of a new family of Testors, called Δ-Testors, which, among other characteristics, are the first ones which take into account the degree of similarity among object descriptions in a covering with fuzzy classes. The new Typicality concept allows the optimization of several order relations considered hierarchically.

KEYWORDS : Pattern Recognition, Logical-Combinatory Approach, Testor Theory, Fuzzy Environments.

CONTENIDO.

INTRODUCCION.

Durante los últimos 30 años el Reconocimiento de Patrones ha sido una de las disciplinas que más auge han tenido, tanto por el creciente número de investigaciones realizadas en este campo, como por el tremendo impacto de su aplicación a todas las áreas del conocimiento humano. Sus definiciones y metodologías se han convertido en herramientas indispensables en el desempeño de áreas como Róbótica, Sistemas en tiempo real, Evaluación y Pronóstico, Diagnóstico, e incluso ha tenido fuerte impacto en ciencias poco formalizadas como Arqueología y Antropología, Medicina y Sociología. El acelerado avance de las computadoras ha sido el elemento que ha impulsado y facilitado este desarrollo del Reconocimiento de Patrones, sustentando las investigaciones en las áreas clásicas de estudio y generando nuevas áreas como Reconocimiento de Voz y Visión por computadora.

La llamada Teoría de Testores o "Teoría del Test", introducida a mediados de la década de los años 50 por Cheguis y Yablonski [1] con el objetivo de abordar problemas de mantenimiento en circuitos digitales, ha representado una de las herramientas más usadas en el área de Reconocimiento de Patrones, desde la década de los años 60 [2] y hasta nuestros días, principalmente para los problemas de selección de variables y construcción de conjuntos de apoyo para la clasificación. Sin embargo, el Testor no se encuentra definido para un número de situaciones prácticas como es el caso de las clases difusas y, aunque diversas definiciones y extensiones han sido propuestas con el propósito de solucionar problemas prácticos que se presentan, ninguna de estas definiciones ha sido capaz de expresar claramente su concepto subyacente. Las generalizaciones hasta ahora obtenidas, como el g-testor [11], no resultan suficientes para abarcar la amplia gama de combinaciones y situaciones que pueden existir. En este sentido resulta deseable poder generar una definición de testor y testor típico que proporcione la herramienta necesaria para los casos hasta ahora no contemplados. Mediante el estudio de la naturaleza lógica de los testores, su formalización axiomática y la revisión de algunos casos prácticos es posible lograr tal generalización en los conceptos.

El mundo en que vivimos es de una naturaleza imprecisa e inexacta, con muy pocos límites bien definidos y, aunque el cerebro humano se encuentra perfectamente capacitado para desenvolverse en esa naturaleza, la matemática clásica ha querido modelar ese mundo con formalismos que sólo aceptan lo exacto, lo preciso y lo bien definido. La Matemática Difusa presenta una visión diferente que acepta la existencia de vaguedades e imprecisiones como una realidad esencial que no puede ni debe ser ignorada. Esta visión permite superar las limitaciones impuestas por la visión clásica y construir modelos mucho más cercanos a la realidad misma. Todas las actividades que involucran al ser humano se encuentran plagadas de dichas imprecisiones, por ello las disciplinas sociales resultan muy beneficiadas al poder hacer uso de las matemáticas como una herramienta de modelación que se adecua más a su realidad, es por eso que la visión difusa (Fuzzy-ism) ha causado tremendo impacto en muchas áreas del conocimiento exacto y humano durante los últimos 30 años. De esta forma, la matemática difusa representa un extenso y casi ilimitado campo de aplicación para el matemático de cualquier especialización.

El primer intento de adaptar los conceptos de Testor y Testor típico a entornos difusos se encuentra en los trabajos de R.S.Goldman [4] al definir primeramente el "Testor Difuso". Este, contemplaba la posibilidad de que la comparación entre valores de un mismo rasgo, adoptados por dos objetos cualesquiera, se interpretara como un "grado de diferenciación" y se midiera en el intervalo [0,1], de esa forma, la comparación entre descripciones de objetos se podía plantear a partir de los grados de diferenciación en cada rasgo y los testores resultaban ser subconjuntos difusos de rasgos.

Posteriormente, el modelo de los "Testores en cierto grado" [], considera la difusión de su concepto de testor en el grado de verdad del predicado "t es testor". Estos testores en cierto grado consideran que los rasgos con que se describe a los objetos pueden ser variables lingüísticas tal como las define Zadeh [6]. Con este modelo se logró preservar las ideas básicas de los testores de Zhuravlev pero incorporando extensiones que permiten flexibilizar las aplicaciones e incorporar posibles imprecisiones.

Por último, Lazo Cortés [11] genera el concepto de g-testor, parametrizando la forma de comparar descripciones de objetos y la de comparar las pertenencias de los mismos,logrando una generalización bastante amplia y abarcando todas las definiciones hasta entonces hechas. Sin embargo, esta definición no considera el caso en que existan clases difusas, y mucho menos la intersección de éstas entre sí y con clases duras.

En este trabajo se ha abordado el estudio de la naturaleza de los cubrimientos, sus diferentes tipos y algunas de sus características intrínsecas que resultan extremadamente útiles para la construcción de nuevos conceptos de testor.

Se procederá de manera constructiva, primeramente mediante el estudio de las propiedades de una clasificación en su naturaleza de cubrimiento. La revisión de las motivaciones atrás de varias definiciones de testor permiten plantear una definición nueva y mas amplia, que satisfaga más casos prácticos. La formalización del concepto de un testor como la diferencia estructural entre dos cubrimientos de un mismo conjunto base y la aplicación directa de éste a la definición de Testor típico resultan claves en este trabajo. El elemento más importante a considerar en todo momento será el Cubrimiento y la estrecha relación de éste con una determinada relación de pertenencia que "clasifica" a los objetos basándose en sus descripciones, serán los elementos que van a generar una serie de cubrimientos sobre el conjunto base de objetos en estudio. La formalización de la forma en que cada subconjunto de rasgos y diferentes relaciones de descripción y pertenencia inducen cubrimientos diferentes y la relación que guardan dichos elementos entre sí es la base para definir nuevas familias de testores

Muchos de los puntos estudiados en este trabajo abren la puerta para abordar, con el mismo enfoque, diversos aspectos relacionados con los cubrimientos y, en general, con toda la teoría de Reconocimiento de Patrones, despertando el interés por cubrir un área mucho mayor de lo planeado originalmente. Ninguna de esas "puertas laterales" corresponde al ámbito de este trabajo, las aportaciones en ciencia, en tecnología y en cualquier campo del conocimiento humano, deben realizarse con la serenidad y contundencia que proporcionan el estudio profundo y la rigurosidad en la metodología.

La naturaleza de este trabajo es novedosa en varios aspectos, en el afán de lograr formalizaciones que se adaptaran mejor al contexto del Reconocimiento de Patrones, muchos conceptos se han modificado y re-definido, incluso los conceptos más tradicionales como el de Cubrimiento o la Tipicidad y Contraste de los objetos.

1.- MODELO CONCEPTUAL.

Para lograr generalizar o extender cualquier concepto es necesario conocer y estudiar dicho concepto desde los orígenes mismos de su fundamentación. La idea o ideas que dan origen a un concepto son rastreables más fácilmente al estudiar sus primeras formalizaciones. En el proceso de comprender los conceptos de Testor y Testor Típico desde su fundamentación y motivación para así poder extenderlos y generalizarlos resulta importante ubicarlos dentro de un contexto muy particular, dicho contexto, en este caso, es el de la clasificación matemática de objetos en el Reconocimiento de Patrones. Los testores únicamente existen en el contexto de una clasificación, o más propiamente, existen dentro de un cubrimiento, así pues, como primer paso, estableceremos un modelo conceptual coherente con el contexto estudiado y formalizaremos cada uno de los conceptos de la forma más conveniente que preserve las condiciones conocidas y aceptadas de forma clásica y al mismo tiempo ofrezca la flexibilidad necesaria para su extensión, posteriormente podremos ubicar a los testores como consecuencia de algunas características esenciales de los cubrimientos. La definición de cubrimiento que se realiza en este trabajo es el resultado de una conceptualización nueva y diferente de toda definición anterior, particularmente útil en el contexto estudiado. En algunos momentos será necesario hacer mención de las definiciones clásicas de varios conceptos para lograr modificarlas de forma compatible con el modelo conceptual en construcción.

1.1. <u>Definiciones Básicas.</u>

La disciplina del Reconocimiento de Patrones aborda fundamentalmente el problema general de agrupar o clasificar un conjunto de objetos en estudio, basándose en sus características inherentes, el grado de similitud o diferencia entre ellos, su cohesión conceptual o cualquier otro criterio de agrupamiento bien definido, esto es, el problema de encontrar o generar una estructura y/o un orden entre objetos aparentemente dispuestos de forma caótica. Al agrupar objetos de esta manera se forman estructuras que llamaremos *Cubrimientos.*

Sea Ω un universo dado de objetos admisibles y sea $O \subseteq \Omega$,

Definición. Un <u>Cubrimiento de O</u> es una tupla $(O, \Re, \delta, Q, \pi)$ donde:

O — Es un conjunto $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ duro y no vacío, de objetos conocidos.

$\Re$ — Es un conjunto $\Re = \{x_1 \setminus \mu_1, \ldots, x_r \setminus \mu_r\}$ difuso, de variables llamadas <u>*Rasgos Descriptivos*</u> en función de los cuales es posible describir a los objetos en *O*. Cada rasgo descriptivo x_i tiene un <u>*Dominio de Definición*</u> M_i.

Para describir a los objetos en *O*, supondremos la existencia de un conjunto llamado <u>*Conjunto de Posibles Descripciones*</u>
$$D^* = \{\{m_1 \setminus \eta_1, \ldots, m_r \setminus \eta_r\} \mid m_i \in M_i \wedge \eta_i \in [0,1], i \in [1,r]\}$$
donde, se tienen, en forma de conjuntos difusos, todas las posibles descripciones de objetos que se pueden construir dados los elementos de $\Re$ y sus dominios de definición. Cada elemento de D^* será llamado <u>*Conjunto Descriptivo*</u> o simplemente <u>*Descripción.*</u>

δ — Es una relación funcional $\delta \subseteq O \times D^*$ llamada <u>*Relación de Descripción*</u> que a cada objeto le asigna una descripción.

Q — Es un conjunto $Q = \{C_1, \ldots, C_k\}$ duro, de etiquetas correspondientes a conjuntos difusos llamados <u>*Clases o Categorías*</u>, en las cuales se agrupan los elementos de *O*. Cada clase queda determinada por :
$$C_{C_i} = \{o_j \setminus \mu_{C_i}(o_j) \mid o_j \in O \;\wedge\; \mu_{C_i}(o_j) = \pi(\delta(o_j), C_i)\}$$

(El conjunto de todos los objetos asociados a su grado de pertenencia a dicha clase).

π Es una relación funcional $\pi \subseteq (\delta(O) \times Q) \times [0,1]$ llamada <u>*Relación de Pertenencia*</u> y que a cada descripción de un objeto le asigna uno y sólo un grado de pertenencia a cada una de las clases.

Esta nueva conceptualización y definición de cubrimiento se convierte en el elemento inicial y de mayor importancia en todas las definiciones y resultados siguientes.

1.2. <u>Tipos de Cubrimientos.</u>

Los elementos constitutivos de un cubrimiento pueden presentarse bajo condiciones muy diversas y relacionarse entre sí en distintas maneras, determinando, de esa forma, varios tipos de cubrimientos cuya clasificación atiende a dos aspectos principales: **1)** la forma y estructura de las clases y, **2)** la presencia o ausencia de rasgos y descripciones.

El hecho de que las clases o categorías, dentro de las cuales se agrupan los objetos en estudio y, que realmente constituyen subconjuntos de O, pueden presentarse como conjuntos duros o bien como conjuntos difusos, es posiblemente la característica que origina la más amplia e interesante variedad de estudios con diversidad de enfoques, definiciones y soluciones dentro del Reconocimiento de Patrones debido a la enorme expansión y desarrollo que la matemática y la lógica difusas han presentado durante las últimas décadas.

Atendiendo a la forma y estructura de las clases, los cubrimientos pueden ser clasificados en cuatro grupos conteniendo cada uno de ellos dos posibles clasificaciones, de acuerdo con la siguiente tabla:

Un Cubrimiento es :	Si cumple :
Disjunto	$\forall i,j \in [1,k], i \neq j \quad C_{C_i} \cap C_{C_j} = \varnothing$
Solapado	$\exists i,j \in [1,k], i \neq j \ni \quad C_{C_i} \cap C_{C_j} \neq \varnothing$
Total	$\bigcup_{i=1..k} sop(C_i) = O$
Parcial	$\bigcup_{i=1..k} sop(C_i) \subset O$
Estricto	$\forall C_i \in Q \quad C_{C_i} \neq \varnothing$
Flexible	$\exists C_i \in Q \ni \ C_{C_i} = \varnothing$

Tabla 1.1 Clasificación de los Cubrimientos atendiendo a la forma y estructura de las Clases.

Estas características pueden ser combinadas de diferentes formas para obtener cubrimientos con diferentes propiedades. En particular, a los cubrimientos Disjuntos y Totales los llamaremos *Particiones* (*Partición Dura* ó *Partición Difusa*).

Atendiendo a la presencia de rasgos y descripciones los cubrimientos pueden ser de tres tipos distintos :

Un Cubrimiento es :	Si cumple :
Descriptivo	$\Re \neq \varnothing$ y $\forall o_i \in O \quad o_i \in dom(\delta)$
Ciego	$\pi = ?$ (No se conoce)
Degenerado	$\Re = ?$ ó $\delta = ?$

Tabla 1.2 Clasificación de los Cubrimientos atendiendo a la prescencia de rasgos y descripciones.

En el caso de los cubrimientos ciegos, se tiene un universo de objetos no-clasificados, es decir, aún cuando se pueda conocer la descripción de cada objeto e incluso el conjunto de clases en que dichos objetos se agrupan, no se dispone de el criterio de agrupación que indica la clasificación de cada uno de ellos. En el caso de los cubrimientos degenerados, no se dispone del conjunto de rasgos que describen a los objetos, o bien, no se conocen las descripciones de cada uno de los objetos cubiertos aún cuando éstos ya se encuentren clasificados, se trata de agrupamientos que no son tratables, por lo menos desde el punto de vista matemático del Reconocimiento de Patrones.

Así pues, los cubrimientos descriptivos, son el único caso en que se dispone de toda la información necesaria en el cubrimiento: el conjunto de rasgos descriptivos, las descripciones de los objetos en el universo de estudio y, el criterio de agrupación que asigna a todos los objetos un grado de pertenencia a cada una de las clases. La mayoría de las definiciones y resultados posteriores estarán referidos a este caso de cubrimientos.

1.3 Problemas.

1.3.1. El Problema de Clasificación.

Basándose en el concepto de cubrimiento, el Reconocimiento de Patrones ha establecido y planteado un conjunto básico de problemas que pretende resolver. Estos problemas se refieren a la forma de encontrar o generar cubrimientos con algunas características deseables, sobre diversos conjuntos de objetos en estudio. La generalidad de los métodos usados para resolver tales situaciones deberá ser suficiente para abarcar una amplia variedad de situaciones iniciales y condiciones restictivas. En pocas palabras, el objeto de estudio del Reconocimiento de Patrones es el *Problema de Clasificación.*

Definición. Un *Problema de Clasificación* (*PC*) es una tupla de la forma $(\Omega,\Re',\delta',C_0,\Theta)$ donde :

Ω Es un universo de objetos admisibles.

$\Re'$ Es el conjunto duro máximo $\Re' = \{x_1,...,x_{r'}\}$ de rasgos descriptivos posibles para los objetos de Ω.

δ' Es una relación $\delta' \subseteq \Omega \times D^*$ de descripción de los objetos en función de $\Re'$.

C_0 Es un Cubrimiento inicial $C_0 = (O,\Re,\delta,Q,\pi)$ para el problema, tal que $O \subseteq \Omega$, $\Re \subseteq \Re'$ y $\delta = \delta'|_{\Re}$.

Θ Es un conjunto $\Theta = \{\theta_1,...,\theta_m\}$ de restricciones a considerar en el problema.

En la cual, deseamos extender el cubrimiento inicial de forma que abarque todo el universo de objetos.

Este problema es de un alto nivel de abstracción y resulta ser un modelo muy general al cual son reducibles muchos de los problemas más concretos en ciencia y tecnología, de ahí su importancia y la necesidad de contar con teorías y metodologías adecuadas para su solución. Los diferentes tipos de cubrimientos iniciales, distinguen entre problemas de tipos distintos :

Definición. Un *PC* es *Supervisado* (*PCS*) si y sólo si su cubrimiento inicial es un *Cubrimiento Descriptivo y Estricto*.

El problema de clasificación supervisado consiste pues, en un universo de objetos del cual se conoce la clasificación de un pequeño subconjunto (cubrimiento inicial) y se pretende clasificar al resto de los objetos en el universo.

Definición. Un *PC* es *Parcialmente Supervisado* (*PCPS*) si y sólo si su cubrimiento inicial es un *Cubrimiento Descriptivo y Flexible*.

La diferencia entre un problema de clasificación supervisado y uno parcialmente supervisado consiste en que en el primero, se dispone de una muestra inicial de elementos en todas las categorías del cubrimiento inicial, mientras que en el segundo el cubrimiento inicial presenta categorías vacías y por lo tanto no es posible su caracterización.

> ***Definición.*** Un *PC* es *No-supervisado* (*PCN*) si y sólo si su cubrimiento inicial es un *Cubrimiento Ciego*.

En este último caso, se trata de un universo de objetos a clasificar del cual no se dispone de la relación de pertenencia de los objetos y por lo tanto de ninguna muestra previamente clasificada.

La disciplina de Reconocimiento de Patrones estudia todos estos problemas y desarrolla constantemente nuevas soluciones.

> ***Definición.*** *Dar una Solución* a un Problema de Clasificación o *Clasificar* es extender su cubrimiento inicial $(O, \Re, \delta, Q, \pi)$, de forma que abarque todo el universo de objetos, transformándolo así en otro cubrimiento $(\Omega, \Re, \delta', Q', \pi')$ satisfaciendo todas las condiciones establecidas en Θ. Es decir, solucionar un *PC* es encontrar un cubrimiento que abarque todo el universo de objetos admisibles, de forma tal que: $Q \subseteq Q'$ y $\pi \subseteq \pi'$. Esto puede implicar un aumento en la familia de clases o categorías.

Clasificar representa el proceso de aplicar un algoritmo $\mathbf{A}(PC) = (\Omega, \Re, \delta', Q', \pi')$, tal que recibe como entrada un problema de clasificación (de cualquier tipo) y, como salida, entrega un cubrimiento solución al *PC* dado. Un algoritmo de este tipo es llamado un *Algoritmo de Clasificación* o *Algoritmo Clasificador*.

1.3.2. El Problema de Selección de Rasgos .

En ocasiones, no es posible conocer los valores de ciertos rasgos descriptivos para los objetos en un cubrimiento, ésto debido al alto costo económico, en tiempo, o computacional de obtener dichos valores, por lo que, comunmente se desea reducir el número de rasgos descriptivos prescindiendo de dichos rasgos de alto costo, esto es, transformar un cubrimiento dado, en otro que contenga el mismo conjunto de clases y el mismo conjunto de objetos, pero descritos por un conjunto menor de rasgos descriptivos. Este proceso, conocido como *Reducción en el Espacio de Representación*, da origen a otro importante problema muy común en el estudio del Reconocimiento de Patrones, el problema de la *Selección de Rasgos* :

Sea $Z = (O, \Re, \delta, Q, \pi)$ un cubrimiento descriptivo con *n* objetos, *r* rasgos descriptivos y *k* clases o categorías. La descripción de cada objeto $o_i \subseteq O$ es un conjunto de la forma: $\delta(o_i) = \{x_1(o_i)|\mu_1, \ldots, x_r(o_i)|\mu_r\}$ (conjunto descriptivo).

> ***Definición.*** *Restringir la descripción de un objeto* o_i a un subconjunto difuso de rasgos $\tau = \{x_p \setminus \mu_p, \ldots, x_q \setminus \mu_q\} \subseteq \Re$, es modificar el grado de pertenencia de cada elemento $x_j(o_i)$ en la descripción de dicho objeto, de forma tal que, se acote superiormente por el grado de pertenencia μ_j del rasgo correspondiente x_j en el conjunto τ. Para realizar esta restricción el grado de pertenencia μ_i de cada elemento $x_i(o_j)$ en $\delta(o_j)$,deberá ser multiplicado por el grado de pertenencia de x_i en τ .

Esto indica que, la descripción parcial de un objeto con respecto a un rasgo descriptivo $x_j(o_i)$, nunca puede, después de una restricción, tener un grado de pertenencia al conjunto descriptivo, superior que la pertenencia de dicho rasgo al subconjunto de rasgos en función del cual se realiza la restricción.

Si la descripción del objeto o_i se restringe a τ, lo denotaremos $\delta(o_i)|_\tau$, o bien, $o_i|_\tau$ en los casos en que ésto no cause confusión alguna.

> ***Definición.*** Una <u>*Reducción, de $\Re$ a τ, en el Espacio de Representación*</u> de un cubrimiento descriptivo Z, es el proceso de restringir a τ, la descripción de todos los objetos en el cubrimiento.

De igual forma que en la restricción de las descripciones, un cubrimiento Z reducido en su espacio de representación se denotará $Z|_\tau$.

En este punto, resulta de suma importancia, revisar con detenimiento el proceso de reducción en el espacio de representación de un cubrimiento:

Dado que la relación de pertenencia en un cubrimiento tiene la forma $\pi \subseteq (\delta(O) \times Q) \times [0,1]$ y que, la restricción de las descripciones asociadas a cada objeto puede reducir el conjunto D^* de posibles descripciones, es factible que, al reducir el espacio de representación de un cubrimiento, las descripciones asociadas a dos o más objetos resulten idénticas o bien muy parecidas (más parecidas que antes de la reducción), en cuyo caso, es posible que se esté modificando también la relación de pertenencia en el cubrimiento, pues, si dos o más objetos tienen descripciones idénticas o muy semejantes, su pertenencia a cada categoría también deberá ser idéntica o muy semejante.

De esa forma, la reducción en el espacio de representación de un cubrimiento descriptivo Z, es un proceso que, formalmente, transforma $Z = (O, \Re, \delta, Q, \pi)$ en otro cubrimiento, $\tau Z = (O,\ \tau,\ \delta|_\tau, Q, \pi')$ donde, el conjunto $\Re$ queda reducido a τ, las descripciones de todos los objetos quedan restringidas al mismo τ y se genera una nueva relación de pertenencia π'. Dicho cubrimiento nuevo τZ será llamado *τ-Reducido.*

Definición. El *Cubrimiento τ-Reducido* (τZ) con $\tau \subseteq \Re$, de un cubrimiento descriptivo Z, es el cubrimiento que resulta al efectuar, sobre Z, una reducción, de $\Re$ a τ, en su espacio de representación.

El cambio (restricción) en las descripciones de los objetos puede ocasionar, como se dijo anteriormente, que aumente la semejanza entre dos descripciones cualesquiera, esto es, que después de la restricción, las descripciones de dos objetos distintos sean más parecidas y por lo tanto, menos distinguibles entre sí. Dado que la reducción se efectúa con respecto a τ que es un subconjunto de $\Re$, es imposible que disminuya su semejanza, que dos descripciones sean menos parecidas que antes de la reducción. Para poder medir el cambio en la semejanza o diferencia de dos descripciones supondremos la existencia de una familia de *Funciónes de Semejanza Parcial*

$$f^{\Re *} = \left\{ f^{\tau} \middle| \; f^{\tau}: \delta(O)|_{\tau} \times \delta(O)|_{\tau} \rightarrow [0,1] \wedge \tau \subseteq \Re \right\}$$

Cada elemento en esta familia es una función que indica el grado de semejanza de dos descripciones de objetos restringidas al mismo subconjunto de rasgos descriptivos medido en el intervalo [0,1]. Así, una semejanza de 0 (cero), entre dos descripciones, será interpretada como "completamente distintas", mientras que una semejanza de 1 (uno) será interpretada como "idénticas" y cualquier valor intermedio indicará "qué tanto se parecen" las descripciones comparadas.

Para obtener el cubrimiento τ-reducido de cualquier cubrimiento descriptivo, aplicaremos un *Algoritmo de Reducción* tal que, recibe como entrada el cubrimiento descriptivo Z y un subconjunto, difuso, de su conjunto de rasgos descriptivos, como respuesta el algoritmo entrega el cubrimiento τ-reducido de Z.

<u>Algoritmo de Reducción</u> ($\mathbf{A}(Z,\tau)=\tau Z$):

1) Sustituir, en Z, el conjunto $\Re$ por el subconjunto τ.

$$(O,\Re,\delta,Q,\pi)\rightarrow(O,\tau,\delta,Q,\pi)$$

2) Reducir el espacio de representación de Z, restringiendo a τ la descripción de todos los objetos en Z.

$$(O,\tau,\delta,Q,\pi)\rightarrow\left(O,\tau,\ \delta|_{\tau},\ Q,\pi\right)$$

3) Construir la nueva relación de pertenencia π' de la siguiente forma:

$$\forall o_i \in O$$

$$\pi'\left((\delta(o_i)|_{\tau},C_s)\right)=\max_{o_m\in O}\left(\pi(\delta(o_m),C_s)\ *\ f^{\tau}\left(\delta(o_i)|_{\tau},\delta(o_m)|_{\tau}\right)\right),$$

con $s\in\{1,...,k\}$

$$\left(O,\tau,\ \delta|_{\tau}\ ,Q,\pi\right)\rightarrow\left(O,\tau,\ \delta|_{\tau}\ ,Q,\pi'\ \right)$$

Mediante este algoritmo logramos reducir el espacio de representación de un cubrimiento descriptivo, o lo que es equivalente, encontrar el cubrimiento τ-reducido de Z para un cierto τ, tomando en consideración el grado de semejanza entre descripciones restringidas.

Cuando, durante la solución de un problema de clasificación o, simplemente por razones experimentales, se desea realizar una reducción en el espacio de representación de algún cubrimiento, se desea también que dicha reducción sea adecuada para que la solución de algún algoritmo clasificador o el problema en estudio, siga siendo útil, significativo o coherente, es entonces cuando se está enfrentando un *<u>Problema de Selección de Rasgos</u>*, donde, haciendo uso de determinados criterios, se busca seleccionar el o los conjuntos de rasgos más apropiados para efectuar la reducción en el espacio de representación.

Definición. Un <u>*Problema de Selección de Rasgos*</u> (*PSR*) es una tupla (Z,Θ) donde :

Z Es un Cubrimiento Descriptivo $Z=(O,\Re,\delta,Q,\pi)$ sobre el cual se desea realizar una reducción en el espacio de representación.

Θ Es un conjunto de condiciones a satisfacer, ya sea por los conjuntos utilizados en la reducción, o bien, por el nuevo cubrimiento restringido.

Este problema es muy común en Reconocimiento de Patrones, y plantea de manera formal la necesidad de eliminar, en un cubrimiento descriptivo, ciertos rasgos o grados de pertenencia en los rasgos, que presentan un alto costo de evaluación o símplemente no se consideran como adecuados en el contexto del problema en estudio.

Definición. <u>*Dar una solución*</u> a un Problema de Selección de Rasgos o <u>*Seleccionar*</u>, es encontrar, satisfaciendo las condiciones Θ, una familia $\tau^* = \{\tau_1,...,\tau_m\}$ de subconjuntos del conjunto de rasgos descriptivos en el cubrimiento Z, que son candidatos para efectuar con respecto a ellos, una reducción en el espacio de representación de Z.

Así pues, seleccionar es aplicar un algoritmo $\mathbf{A}(PSR)=\tau^*$, tal que toma como entrada un problema de selección de rasgos y devuelve la familia solución de subconjuntos candidatos para efectuar una reducción en el espacio de representación. Un algoritmo de este tipo es un <u>*Algoritmo de Selección*</u> o <u>*Algoritmo Seleccionador*</u>.

2. PROPIEDADES DE LOS CUBRIMIENTOS.

Una vez que hemos formalizado y replanteado, a través del capítulo anterior, el modelo conceptual de los principales elementos y problemas en la disciplina del Reconocimiento de Patrones, podemos considerar que disponemos de suficiente contextualización para avanzar el siguiente paso y lograr una mayor profundización en el estudio de los Testores y la investigación sobre posibles generalizaciones y extensiones para entornos difusos. El cubrimiento, y en particular el cubrimiento descriptivo, es el elemento central en el cual se da el "fenómeno" de los Testores. En este capítulo estudiaremos algunas de las propiedades que presentan los cubrimientos descriptivos y podremos ubicar a los Testores como una consecuencia de dichas propiedades. Los conceptos y definiciones planteados en este capítulo servirán posteriormente para la formulación de nuevos conceptos así como para la demostración de algunas propiedades en el capítulo siguiente.

2.1. Cubrimiento Ideal

Al conjunto de las definiciones anteriores les subyace el importante supuesto de que un cubrimiento, o más precisamente la relación π de pertenencia de un cubrimiento, presenta una dependencia con las descripciones de los objetos. Esto quiere decir que la "decisión" de ubicar un objeto en una o varias clases, con algún grado de pertenencia, se efectúa tomando en cuenta la descripción de dicho objeto expresada por la relación δ de descripción. De ser así, se podría esperar que las categorías, en un cubrimiento, tuvieran objetos que fueran muy semejantes entre sí y muy diferentes a los objetos de otras categorías[1], mientras más marcadas sean ambas características, más fácilmente distinguibles se volverán las clases.

[1] Los términos de *semejanza* y *diferencia* que se mencionan se refieren a la medida de semejanza de las descripciones correspondientes medida por las funciones de semejanza parcial introducidas en el capítulo anterior. Durante este capítulo se profundizará en ambos conceptos.

Ahora bien, efectivamente no existe ningún elemento que nos permita mantener el supuesto de que un cubrimiento realmente fue construido tomando en cuenta su conjunto de descripciones para clasificar a los objetos. Resulta perfectamente factible imaginar que se trate de un cubrimiento meramente "caprichoso", en el sentido de no propiciar categorías con las características mencionadas y, por lo tanto, de no responder en forma lógica a las descripciones de los objetos en función del conjunto $\mathfrak{R}$ de rasgos.

De todo lo anterior se deduce que resulta conveniente, por un lado, definir alguna forma de determinar el grado de dependencia, dentro de un cubrimiento, entre sus relaciones π y δ y, por otro lado, poder anticipar las consecuencias de ello así como las posibles imprecisiones o inconsistencias que pudieran resultar al trabajar con problemas de clasificación y de selección de rasgos cuyos cubrimientos iniciales presenten condiciones extremas o anormales de acuerdo con algún criterio conveniente. La medida de la dependencia entre la relación de pertenencia y la relación de descripción será indicativo de qué tan caprichosamente fue creado algún cubrimiento en particular.

Para lograr determinar la dependencia estudiada, construiremos y formalizaremos un concepto claro de lo que concebimos como el "mejor cubrimiento", aquel donde las clases se vuelven perfectamente distinguibles. Este cubrimiento ideal servirá como punto de referencia e inducirá, de forma natural, el concepto complementario del "peor cubrimiento". Comprender estos casos extremos nos permitirá ubicar, a un cubrimiento dado, en algún punto intermedio entre ambos y formalizar un método para cuantificar dicha situación.

Intuitivamente, en el caso ideal de un cubrimiento cuya relación de pertenencia depende en forma maximal de su relación de descripción, un objeto cualquiera debería ser clasificado, con un alto grado de pertenencia, en aquellas categorías que contengan muchos objetos muy parecidos a él y, con menor grado de pertenencia, en aquellas categorías con menos objetos o menos parecidos a él. Por otro lado, para lograr máxima distinguibilidad de las clases, un cubrimiento ideal presentaría clases o categorías con descripciones de objetos que serían totalmente disjuntas en cuanto a los valores tomados por cada uno de sus rasgos.

En otras palabras, un cubrimiento ideal presentaría dos características esenciales, en primer lugar, clases con descripciones de objetos cuyos valores tomados en $\Re$ serían disjuntos de una clase a otra. A esta condición la denominaremos <u>*Condición de Discriminación*</u>, pues expresa la distinción que existe entre los valores de rasgos tomados por los objetos en una clase y en otra. En segundo lugar, la pertenencia de un objeto a cualquier clase sería determinada por la cantidad de objetos, en dicha clase, con alto grado de semejanza a él y ponderado por las pertenencias de cada objeto a la clase. A este última condición la denominaremos <u>*Condición de Caracterización*</u>, pues relaciona la pertenencia de un objeto a una clase con el grado en que ese objeto es característico o típico de la clase.

A reserva de que más adelante, en este mismo capítulo, desarrollaremos el concepto de tipicidad, por el momento denotaremos como $\mathscr{T}_{\Re}^{C_s}(o_i)$ a la medida en que un objeto o_i es típico en una clase C_s. Tomando en cuenta esto, podemos expresar formalmente las dos condiciones de un cubrimiento ideal como:

Condición de Discriminación :

$$\forall C_i, C_j \in Q,\ i \neq j \quad \forall x_s \in \Re \qquad M_s|_{C_i} \cap M_s|_{C_j} = \varnothing$$

Condición de Caracterización:

$$\forall C_j \in Q \ \ \forall o_i \in O \quad \pi\big(\delta(o_i), C_j\big) = \mathscr{T}_{\Re}^{C_s}(o_i)$$

esto quiere decir dos cosas, en primer lugar, que los valores tomados por cada rasgo, en la descripción de los objetos, son disjuntos a través de todas las clases e implica que <u>*todos los rasgos son testores típicos unitarios*</u> en el sentido de Zhuravlev [2] en el cubrimiento[2],

[2] El concepto y la definición de Testor de Zhuravlev serán precisados en el siguiente capítulo.

en segundo lugar, que la pertenencia de los objetos a las clases se corresponde con su tipicidad en las mismas clases.

Por el contrario, en el peor de los casos, un cubrimiento "totalmente caprichoso" debe presentar las características opuestas, es decir, aquel cubrimiento duro en el que todas las clases tuvieran sus descripciones idénticas, es decir,

$$\forall C_i, C_j \in C \quad \left.(M_1 \times \ldots \times M_r)\right|_{C_i} = \left.(M_1 \times \ldots \times M_r)\right|_{C_j}$$

lo cual indica que el valor tomado por cada uno de los rasgos, en las descripciones de los objetos, no es discriminante y, por lo tanto, no es tomado en cuenta por la relación de pertenencia para agrupar a los objetos.

La descripción de las condiciones del mejor y peor caso, nos permiten crear un funcional que indique qué tan "cerca" se encuentra un cubrimiento dado del mejor caso o del peor caso en base a las condiciones de caracterización y discriminación, a dicha propiedad le llamaremos <u>*Cohesión del Cubrimiento*</u>. Resulta conveniente que el funcional de cohesión de un cubrimiento se exprese en un intervalo [0..1] con el peor y el mejor caso respectivamente como los extremos, esto impone dos requerimientos:

- La evaluación de la expresión matemática del caso ideal debe ser 1 y la del peor caso debe ser 0.
- Ningún cubrimiento fuera de los casos anteriores debe alcanzar los valores extremos 0 y 1.

La concepción misma de esta propiedad así como el lograr precisar la forma de el funcional de cohesión de un cubrimiento constituyen uno de los logros más importantes de esta investigación pues, es precisamente el concepto de cohesión lo que permite lograr una importante extensión del concepto de Testor y de la tipicidad en los Testores. Por ahora, examinemos ambas condiciones con detenimiento.

Para expresar el funcional de cohesión de un cubrimiento nos serviremos de los conceptos, hasta ahora intuitivos, de un cubrimiento ideal y uno caprichoso, así como de las expresiones lógicas de dichos casos, con ello, iremos avanzando, de forma constructiva, en la formalización de esa "distancia" al mejor y peor caso. En el camino iremos estableciendo algunas definiciones previas. Las condiciones de discriminación y caracterización se estudiarán de forma independiente, primero estableceremos la formalización de la discriminación y después abordaremos la condición de caracterización, ambas hasta llegar a elementos suficientes para poder construir la formalización del concepto de cohesión.

2.1.1.. Condición de Discriminación.

La condición de discriminación indica que, en un cubrimiento, todos los rasgos considerados para describir a los objetos son igualmente discriminantes y maximalmente discriminantes, esto permitiría a la relación de pertenencia clasificar a los objetos basándose tan sólo en el valor de uno de sus rasgos y sin importar cuál de ellos se tomara en cuenta, la clasificación de cualquier objeto sería exactamente la misma, es decir, el cubrimiento resultaría inalterado si la relación de pertenencia clasifica con descripciones basadas en sólo uno, algunos o todos los rasgos descriptivos.

Sea $Z = (O, \Re, \delta, Q, \pi)$ un cubrimiento descriptivo con n objetos cubiertos, k clases o categorías y r rasgos descriptivos.

Denotaremos por $C_{p,q}$ a la intersección $C_p \cap C_q$ sin importar si se trata de clases duras o difusas.

Definición. <u>El *Error de Discriminación* de un objeto</u> $(\varepsilon_{\tau}(o_i))$ con respecto a un $\tau \subseteq \Re$ subconjunto difuso de rasgos descriptivos, es la suma de sus grados de pertenencia a todas las intersecciones entre parejas de categorías, a las cuales pertenece dicho objeto, cuando se restringe su descripción al subconjunto τ de rasgos.

$$\varepsilon_{\tau}(o_i) = \sum_{\substack{p,q=1..k \\ p \neq q}} \mu_{C_{p,q}}\left(\delta(o_i)|_{\tau}\right)$$

Esta definición permite conocer qué tanto, un objeto en el cubrimiento, se "confunde" de clase al restringir su descripción a un subconjunto de rasgos.

Para cuantificar este concepto es conveniente tener algún criterio para considerar la relevancia relativa de cada rasgo. En el caso más simple podemos suponer que todos los rasgos tienen exactamente la misma relevancia relativa y, por tanto, los errores de caracterización causados por todos los rasgos son igualmente importantes. En este caso, resulta muy simple conocer el efecto de confusión en las pertenencias, causado por el subconjunto τ de rasgos sobre todos los objetos del cubrimiento, para ello podemos hacer uso de la siguiente

Definición. El <u>*Error de discriminación Acumulado*</u> $(\hat{\varepsilon}_{\tau}(Z))$ de un cubrimiento descriptivo Z, con respecto a un subconjunto difuso de rasgos descriptivos, es el promedio de los errores de discriminación, producidos por dicho subconjunto de rasgos, sobre todos los objetos del cubrimiento.

$$\hat{\varepsilon}_{\tau}(Z) = \frac{\sum_{o_i \in O}\left(\varepsilon_{\tau}(o_i)\right)}{n \cdot \binom{k}{2}}$$

Dado que el número de objetos en el cubrimiento es n y que el número de intersecciones entre parejas de clases es igual a las combinaciones de k (el número de clases) en 2 (por ser parejas), entonces, al dividir la suma de los errores de discriminación entre el producto de estas dos cantidades, estamos obteniendo un promedio del error producido por τ en el cubrimiento.

Queda claro hasta aquí que esta medida, el error de discriminación, es un indicativo del poder de evitar confusiones que un subconjunto de rasgos tiene sobre algún objeto o conjunto de objetos, de forma tal que, mientras menor sea el error producido por un rasgo, mayor poder de discriminación tendrá dicho rasgo pues, esto indica que al tomar el rasgo en cuenstión como único rasgo descriptivo de los objetos en el cubrimiento, la reducción en el espacio de representación causa un efecto de confusión mínimo en las pertenencias de los objetos, la misma explicación resulta válida al tratar con cualquier subconjunto de rasgos descriptivos. Así pues, resulta natural desear cuantificar dicho poder discriminante como una característica propia de cada subconjunto de rasgos en el cubrimiento.

Definición. El <u>*Poder Discriminante*</u> o <u>*Poder de Discriminación*</u> ($\Omega_Z(\tau)$) de un subconjunto difuso de rasgos descriptivos $\tau \subseteq \Re$ con respecto a un cubrimiento Z, es la proporción en la que, dicho subconjunto, produce errores de discriminación sobre todos los objetos del cubrimiento cuando se efectúa, con respecto a él, una reducción en el espacio de representación del cubrimiento.

$$\Omega_Z(\tau) = 1 - \hat{\varepsilon}_\tau(Z)$$

Al sustraer el error acumulado de uno logramos expresar el concepto inverso, es decir, expresar que el poder de discriminación es complementario (con respecto a la unidad) al error de caracterización producido. Este funcional permite obtener una magnitud entre cero y uno representando el poder de discriminación del subconjunto τ sobre del cubrimiento Z.

Examinemos con mayor detenimiento este funcional del poder discriminante. Cuando un subconjunto de rasgos τ tiene un poder discriminante máximo indica que, aún si las descripciones de todos los objetos en el cubrimiento se restringen a τ, su error de caracterización sigue siendo cero, es decir, no existe confusión alguna en cuanto a la clase a la cual pertenece cada objeto, ni en cuanto a su grado de pertenencia a cada clase. En el caso de cubrimientos con clases disjuntas esto representaría un Testor en el sentido de Zhuravlev.

De acuerdo con lo anterior, resulta claro que el funcional del poder discriminante puede ser usado como base para la definición de una familia más amplia de Testores que consideren diferentes grados de confusión entre las clases. Este concepto será desarrollado en el capítulo siguiente.

2.1.2. Condición de Caracterización.

Así como la condición de discriminación exige que los valores de los rasgos tomados por las descripciones de objetos en todas las clases sean disjuntos, la condición de caracterización para un cubrimiento ideal asegura que la pertenencia de los objetos a las clases estará determinada por su tipicidad en cada una de ellas. Desarrollar este concepto es necesario para lograr reunir todas las condiciones exigidas por el caso ideal y con ello poder formalizar el concepto de cohesión.

Las definiciones que a continuación se presentan están basadas en la capacidad de poder evaluar el grado de semejanza o diferencia entre dos descripciones de objetos restringidas al mismo subconjunto difuso de rasgos descriptivos. Esta capacidad está dada por las funciones de semejanza parcial mencionadas en el capítulo anterior.

Definición. La *Tipicidad Relativa* de un objeto ($\mathscr{T}_\tau^{C_j}(o_i)$) con respecto a una clase C_j y relativa a un $\tau \subseteq \Re$ subconjunto difuso de rasgos descriptivos, es la media aritmética, ponderada por los grados de pertenencia a dicha clase, de las semejanzas entre la descripción del objeto y la descripción de todos los demás objetos en el cubrimiento cuando se restringe su descripción al subconjunto τ de rasgos.

$$\mathscr{T}_\tau^{C_j}(o_i) = \frac{\sum\limits_{\substack{o_s \in O \\ s \neq i}} \left(f^\tau\left(\delta(o_i)|_\tau, \delta(o_s)|_\tau \right) * \pi\left(\delta(o_s), C_j \right) \right)}{\sum\limits_{o_s \in O} \pi\left(\delta(o_s), C_s \right)}$$

Obsérvese que el hecho de que el objeto tenga un grado de pertenencia diferente de cero, no constituye una condición necesaria para que la magnitud de la tipicidad tenga realmente sentido, en el caso de que ésto no se cumpla, la semejanza de las descripciones será ponderada con cero y por lo tanto no afectará el promedio.

La Tipicidad no es un concepto nuevo, cuantifica la semejanza de un objeto (su descripción) hacia el interior de una clase, indicando qué tan "típico" es en esa clase. Sin embargo, el concepto de tipicidad relativa presenta dos modificaciones importantes, por un lado, la considerción de que la tipicidad sea relativa a un subconjunto de rasgos contra los cuales se efectúa una reducción, por el otro lado y aún más importante, la ponderación de las semejanzas con los grados de pertenencia de cada objeto a la clase. Análogo a este concepto existe el concepto complementario del Contraste que expresa la semejanza de un objeto hacia el exterior de una clase. De hecho, el contraste es expresable en función de la tipicidad de la siguiente manera:

Definición. El <u>Contraste Relativo de un objeto</u> ($\mathscr{C}_\tau^{C_j}(o_i)$) con respecto a una clase C_j y relativo a un $\tau \subseteq \Re$ subconjunto difuso de rasgos descriptivos, es la media aritmética, ponderada por los grados de pertenencia a todas las clases excepto C_j, de las semejanzas entre la descripción de dicho objeto y las descripciones de todos los demás objetos en el cubrimiento cuando se restringe su descripción al subconjunto τ de rasgos.

$$\mathscr{C}_\tau^{C_j}(o_i) = \frac{\sum\limits_{\substack{C_s \in Q \\ C_s \neq C_j}} \left(\mathscr{T}_\tau^{C_s}(o_i)\right)}{k-1}$$

Ahora bien, dado que la condición de caracterización lo exige, debemos garantizar que la pertenencia de todos los objetos a las clases sea igual a su tipicidad relativa en las mismas clases. Para lograrlo estableceremos la siguiente

Definición. El <u>Error de Caracterización</u> ($\gamma_\tau^{C_j}(o_i)$) de un objeto o_i en un cubrimiento descriptivo Z, con respecto a $\tau \subseteq \Re$ un subconjunto difuso de rasgos descriptivos y con respecto a una clase C_j, es el valor absoluto de la diferencia entre su grado de pertenencia a dicha clase y su tipicidad relativa a τ con respecto a la misma clase.

$$\gamma_\tau^{C_j}(o_i) = \left|\pi\left(\delta(o_i), C_j\right) - \mathscr{T}_\tau^{C_j}(o_i)\right|$$

La magnitud de este error indica qué tanto se cumple o incumple la condición de discriminación del caso ideal de cubrimiento.

Una vez comprendido este concepto resulta fácil realizar las definiciones necesarias para lograr que el error de discriminación abarque toda una clase y después el cubrimiento. En primer lugar consideremos:

Definición. El <u>*Error de Caracterización Acumulado*</u> ($\hat{\gamma}_{\tau}^{C_j}(Z)$) de un cubrimiento descriptivo Z, con respecto a una clase C_j y relativo a un subconjunto difuso de rasgos descriptivos, es el promedio de los errores de tipicidad relativos a τ con respecto a dicha clase, de todos los objetos en el cubrimiento al restringir sus descripciones al conjunto difuso τ.

$$\hat{\gamma}_{\tau}^{C_j}(Z) = \frac{\sum_{o_s \in O} \left(\gamma_{\tau}^{C_i}(o_j) \right)}{n}$$

El error acumulado cuantifica la situación interna de una cierta clase promediando los errores de todos sus objetos. Recuerde que n es el número de objetos cubiertos. Por último es necesario conocer este error en todas las clases del cubrimiento:

Definición. El <u>*Error de Caracterización Total*</u> de un cubrimiento descriptivo Z, con respecto a un subconjunto difuso de rasgos descriptivos, es el promedio de los errores de tipicidad acumulados sobre todas las clases en el cubrimiento y con respecto al mismo subconjunto de rasgos descriptivos.

$$\hat{\hat{\gamma}}_{\tau}(Z) = \frac{\sum_{C_s \in Q} \left(\gamma_{\tau}^{C_s}(Z) \right)}{k}$$

Una vez que se ha alcanzado este punto y, al igual que en el caso del error de discriminación, resulta muy conveniente cuantificar, como una característica propia del subconjunto de rasgos, su capacidad para mantener la tipicidad de un cubrimiento al hacer, con respecto a él, una reducción en el espacio de representación. Para lograrlo haremos uso de la siguiente

> ***Definición.*** El _Poder Caracterizante_ ó _Poder de Caracterización_ de un subconjunto difuso de rasgos descriptivos $\tau \subseteq \Re$ con respecto a un cubrimiento *Z*, es la proporción en la que, dicho subconjunto, produce errores de caracterización sobre todos los objetos del cubrimiento cuando se efectúa, con respecto a él, una reducción en el espacio de representación.

$$\Theta_Z(\tau) = 1 - \hat{\gamma}_\tau(Z)$$

2.2. La Cohesión

Ahora bien, hasta este punto se ha logrado formalizar, con los conceptos de error y poder discriminante y caracterizante, el concepto inicial de un cubrimiento ideal con las descripciones de sus objetos disjuntas a través de las categorías y la pertenencia de los objetos correspondiente a su tipicidad. Para poder expresar ahora el mejor y peor caso contemplado bastará con asociar las expresiones lógicas de cada caso con su consecuencia matemática, esto es, el mejor caso será asociado con aquel cubrimiento con poder de discriminación máximo y poder de caracterización máximo, el peor caso se modelará exactamente a la inversa.

Así, con base en las definiciones anteriores es posible hacer la siguiente

Definición. <u>*La Cohesión*</u> ($\Psi(Z)$) de un cubrimiento descriptivo Z es la medida en la que su relación de pertenencia π depende de su relación de descripción δ. Esto es, la medida en que la descripción de los objetos es tomada en cuenta por la relación de pertenencia para agrupar a los objetos.

Para cuantificar la cohesión de un cubrimiento es posible tomar diversos criterios sobre el papel del poder de discriminación del conjunto de rasgos. En particular resulta atractivo considerar todos los posibles subconjuntos de rasgos, es decir, el conjunto potencia del conjunto original de rasgos descriptivos. De esa forma podemos obtener un simple promedio del poder discriminante en todos los posibles subconjuntos de rasgos (con excepción del vacío). Por su parte el poder de caracterización debe considerarse de forma independiente pues, basta con exigir máximo poder de caracterización al conjunto original $\Re$ de rasgos descriptivos, de esa forma, queda expresada más claramente la idea intuitiva de que, un cubrimiento ideal puede dejar de serlo al reducir su espacio de representación.

Sea, $\dot{\Re} = P(\Re) \setminus \{\ \}$

$$\Psi(Z) = \frac{\sum_{\tau_i \in \dot{\Re}} \left(\Omega_Z(\tau)\right) + \Theta_Z(\Re)}{\left|\dot{\Re}\right| + 1}$$

En esta expresión, se están considerando todos los subconjuntos difusos del conjunto $\Re$, evidentemente se trata de un conjunto de cardinalidad infinita, lo cual, vuelve a la definición inadecuada para su aplicación práctica. Para efectos de cálculo es necesario acotar de alguna forma al conjunto $\dot{\Re}$ para volverlo finito. En este caso la opción que se presenta como la más adecuada es la de restringir $\dot{\Re}$ en función de la precisión deseada en las pertenencias de los rasgos al conjunto de rasgos descriptivos. En ningún caso práctico se dispone realmente de precisión infinita tal como se expresa en la teoría, de ahí que utilizar la precisión real como el medio para convertir $\dot{\Re}$ en finito, resulta natural y ampliamente justificable.

En este funcional se puede observar un aspecto importante: el poder discriminante de todos los subconjuntos de $\Re$ es ponderado de la misma forma para obtener el promedio sin tomar en cuenta su relevancia relativa. Otro criterio posible sería el de asignar ponderaciones diferentes al poder discriminante de cada subconjunto de rasgos. Este criterio permitiría expresar el hecho de que ciertas combinaciones de rasgos son más o menos relevantes, en cuanto a su discriminación y, por lo tanto, deben ser ponderadas de forma consecuente.

Sea $\beta(\tau)$ la ponderación asociada al subconjunto τ de rasgos descriptivos, Entonces la cohesión de un cubrimiento, ponderando la relevancia de cada subconjunto de rasgos, la podemos expresar como:

$$\Psi(Z)=\frac{\sum_{\tau\in\dot{\Re}}\left(\beta(\tau)*\left[\Omega_Z(\tau)\right]\right)+\Theta_Z(\Re)}{\left[\sum_{\tau\in\dot{\Re}}(\beta(\tau))*\left|\dot{\Re}\right|\right]+1}$$

Los anteriores funcionales de cohesión expresan la medida en la que un cubrimiento es "sano" o "caprichoso" y resultan adecuados para medir el vínculo investigado entre las relaciones de descripción y de pertenencia en un cubrimiento dado, ya que :

- En el mejor caso (caso ideal), todas las intersecciones entre dominios restringidos serán vacías y, por tanto, el error de discriminación de todos los objetos en el cubrimiento con respecto a todos los rasgos descriptivos será exactamente cero, por su parte todos los objetos tendrán pertenencia a las clases exactamente igual que su tipicidad en las mismas, por lo que los errores de caracterización de todos los objetos con respecto a todas las clases serán también cero y, la cohesión del cubrimiento resultará ser exactamente 1.

- Por el contrario, en el peor caso, los objetos tendrán un error de caracterización máximo, al pertenecer a todas las intersecciones entre categorías, ocasionando que el poder discriminador de todos los rasgos descriptivos se reduzca a cero. Como la condición inicial lo expresa, el peor cubrimiento es un cubrimiento con clases duras y. por lo tanto, los objetos tendrán una pertenencia de uno a las clases donde su tipicidad es cero, ocasionando que los errores de caracterización sean máximos, el poder de caracterización se vuelva cero y, la cohesión del cubrimiento también será 0.

- Cualquier otro cubrimiento tendrá una cohesión entre 0 y 1.

Resulta natural hasta aquí, observar que, dado un conjunto O de objetos y un conjunto Q de etiquetas de categorías, existen múltiples formas de distribuir los elementos de O en las diversas categorías C_{C_i}, esto es, múltiples relaciones de pertenencia con las que se puede formar un cubrimiento. Por lo tanto, es posible crear, cubrimientos distintos que presenten dichos elementos en común (O y Q) y que tengan, cada uno de ellos, diferente relación de pertenencia y por consiguiente diferente medida de cohesión. Para expresar este concepto conviene la siguiente

Definición. Una <u>*Familia Completa* de cubrimientos</u> (Φ_Z^*) en torno a, o alrededor de, un cubrimiento descriptivo $Z = (O, \Re, \delta, Q, \pi)$, es el conjunto $\Phi_Z^* = \{Z_i \mid Z_i = (O, \Re, \delta, Q, \pi_i)\}$, de todos los cubrimientos de O en Q, que es posible construir variando sólo la relación de pertenencia.

Llamaremos simplemente *Familia* de cubrimientos a cualquier conjunto $\Phi_Z \subset \Phi_Z^*$

Cada una de estas formas de distrubuir los objetos representa un cubrimiento diferente en cuanto a su relación de pertenencia y, por lo tanto, con la posibilidad de tener cohesión distinta al cubrimiento original. Esto indica que dada la definición del conjunto de objetos en estudio y de el conjunto de clases en que éstos deben estar agrupados, es posible encontrar aquella distribución que logre la máxima cohesión así como la que logre la mínima cohesión.

Consideremos una familia completa de cubrimientos Φ_Z^* alrededor de un cubrimiento descriptivo Z, podemos establecer una relación de orden entre los cubrimientos que exprese la jerarquización de los mismos por su cohesión. Para ello definamos primero, una partición entre los valores de las cohesiones, en la que las clases estarán formadas por los cubrimientos con la misma cohesión:

$$Z_1, Z_2 \in \mathcal{O}_i \iff \Psi(Z_1) = \Psi(Z_2)$$

con esta relación de equivalencia estamos formando *m* clases $\mathcal{O}_i$, i =1..*m* que contienen a todos los cubrimientos con la misma cohesión. Ahora es posible definir un orden sobre las clases, que exprese la precedencia $\prec_\Psi$ de acuerdo a una expresión Ψ de la cohesión:

$$\mathcal{O}_i \prec_\Psi \mathcal{O}_j \iff \underset{Z \in \mathcal{O}_i}{\Psi(Z)} \geq \underset{Z \in \mathcal{O}_j}{\Psi(Z)}$$

Ahora, simplemente añadiremos una definición que nos permita una notación clara y que exprese la jerarquización de un cubrimiento en particular.

Definición. Un Cubrimiento es Maximal o Minimal si pertenece, respectivamente, a una clase maximal o minimal con respecto a la relación de orden $\prec_\Psi$.

Un cubrimiento no forzosamente presenta cohesión máxima o cohesión mínima. De forma general un cubrimiento presentará una medida de cohesión que no sea ni máxima ni mínima, pero aquellos cubrimientos que sí presenten los casos extremos serán especialmente útiles en el estudio de los procesos de clasificación.

El hecho de que un cubrimiento sea maximal, indica que tiene la mejor distribución posible de sus elementos desde el punto de vista de la cohesión y, por lo tanto, su distribución de los objetos en las categorías es lo mas cercano posible al caso ideal que es posible lograr. La medida de esta cohesión máxima proporciona una idea clara del potencial que se puede esperar en dicho cubrimiento dadas la definiciones de O, δ y Q. Por el contrario, un cubrimiento que sea minimal de acuerdo al operador definido anteriormente, indica que el cubrimiento tiene la peor distribución posible de sus elementos, en una forma tal que su estructura se asemeja lo más posible al peor caso.

Definición. Un cubrimiento descriptivo es *Perfecto* si es maximal y minimal al mismo tiempo.

En algunos casos triviales es posible observar la característica de perfección, por ejemplo, un cubrimiento cuyo conjunto de clases sea unitario, será siempre un cubrimiento perfecto. Lo mismo ocurrirá con cubrimientos con un conjunto unitario de objetos y en algunos otros casos donde la forma de la relación de pertenencia reduzca las posibilidaes de distribución de los objetos a algún caso trivial.

3. FAMILIAS DE TESTORES.

A lo largo de dos capítulos hemos avanzado dos grandes pasos en el estudio de los cubrimientos y algunas de sus propiedades principales. Ahora es el momento de concretar esta investigación aplicando todo lo expuesto, en el campo específico de los Testores y lograr las generalizaciones y extensiones buscadas. En el afán de reunir, combinar y aplicar en este capítulo todos los conceptos estudiados hasta el momento, se vuelve preciso comenzar haciendo mención de los conceptos y definiciones clásicos que han representado en todo momento la motivación de este trabajo, ésto facilitará la comprensión de las extensiones encontradas y permitirá evaluar su importancia y/o utilidad.

3.1. Conceptos y Definiciones clásicos.

La primera incursión del concepto de Testor en el marco de la teoría de Reconocimiento de Patrones fue la definición dada por Yu. I. Zhuravlev en 1966 [2] en los siguientes términos:

Sea T una tabla donde se encuentra la información correspondiente a la descripción de varios objetos en función de algunos rasgos descriptivos. Sea también T dividida en dos sub-tablas T_0 y T_1 expresando la agrupación de los objetos en dos clases duras y disjuntas:

T		x_1	...	x_r	
	o_1	$x_1(o_1)$	...	$x_r(o_1)$	$=\delta(o_1)$
T_0					
T_1	o_n	$x_1(o_n)$	...	$x_r(o_n)$	$=\delta(o_n)$

Definición. (Testores de Zhuravlev). Un conjunto $R=\{x_1,\ldots,x_r\}$ de columnas de una tabla $T=\{T_0,T_1\}$, se denomina <u>*Testor*</u> si después de eliminar de T todas las columnas excepto las de R, no existe renglón alguno de T_0 igual a uno de T_1.

R será llamado <u>*Testor Típico*</u> si no existe $R' \subset R$ tal que R' sea Testor.

Esta definición se hizo en un contexto realmente muy limitante, los objetos se consideran descritos por variables (rasgos descriptivos) de naturaleza booleana y la división de la tabla T indica que sólo se consideran dos clases posibles. Naturalmente esta definición se extendió para incluir rasgos con cualquier dominio de definición y cualquier número de clases, sin embargo, dos aspectos determinantes en el concepto se mantuvieron: **1)** la modelación de las clases como conjuntos duros y, **2)** la consideración implícita de que dos renglones en la tabla (descripciones de objetos) sólo pueden ser idénticos o distintos. Ambos elementos han resultado cruciales para diversas extensiones del concepto de Testor que se han formulado justamente para eliminar dichas restricciones.

Mediante la generalización de algunos conceptos clásicos podremos definir nuevas familias de Testores. Para ello es necesario, en algunos casos, encontrar definiciones alternativas de los conceptos. Estas definiciones deben respetar cabalmente las condiciones originales de los conceptos pero adaptarse mejor al contexto estudiado. Veamos la forma en que esta definición puede ser replanteada conservando el concepto intacto pero expresándola en los términos utilizados durante esta investigación. Particularmente, como se manifestó en el capítulo anterior, la definición de Testor de Zhuravlev puede ser expresada en términos del poder de discriminación de un subconjunto de rasgos:

Definición. (Testores de Zhuravlev-Redefinición). Un subconjunto $\tau \subseteq \Re$ de rasgos descriptivos en un cubrimiento descriptivo Z, se denomina *Testor* si al efectuar una reducción a τ, en el espacio de representación de Z, el error de discriminación acumulado del cubrimiento resultante es exactamente cero.

Ubicar el Testor como un subconjunto de rasgos descriptivos en un cubrimiento resulta natural a este nivel de avance. La reducción en el espacio de representación del cubrimiento Z resulta ser la formalización de "eliminar de *T* todas la columnas excepto las de *R*" pues, al considerar sólo un pequeño subconjunto duro de rasgos descriptivos se está restringiendo la descripción de los objetos a dicho subconjunto exactamente en la forma en que el algoritmo de reducción lo haría. Replantear la definición de Testor de Zhuravlev de esta forma resulta en un cambio de perspectiva que nos posibilita el estudio de los testores desde una óptica más amplia. Una tercera interpretación de los Testores de Zhuravlev, como resultado de la comparación entre dos cubrimientos, así como una redefinición del concepto de tipicidad se planteará más adelante en este capítulo.

Una de las extensiones al concepto de Testor, más interesantes por sus implicaciones, es la formulada por R. S. Goldman en 1980 [4], en la cual, se parte prácticamente de los mismos supuestos que Zhuravlev pero considerando que la comparación entre descripciones de objetos se basa en criterios de comparación por rasgo que pueden medirse con valores en el rango [0,1] interpretando éstos como "grados de diferenciación" y llamando al resultado *Testores Difusos*. Esta visión supera uno de los dos puntos mencionados anteriormente produciendo la siguiente definición:

Sea MA (Matriz de Aprendizaje) una matriz conteniendo las descripciones de un conjunto de objetos conocidos (la misma información que la tabla anterior) y sea MD (Matriz de Diferencia) una matriz conteniendo la diferencia, en los valores de todos los rasgos, de cada objeto contra todos los objetos pertenecientes a las otras clases, de forma tal que al renglón i de dicha matriz lo denotaremos A_i.

Definición. (Testores de Goldman). Un subconjunto difuso $T = \{x_1 \setminus \mu_1, ..., x_r \setminus \mu_r\}$ de rasgos descriptivos en MA es un <u>*Testor Difuso*</u> respecto de MA si

$$\forall A_i \in MD \left[\exists_{x_p \setminus \mu_p \in T} \ \ni \ 0 < \mu_T(x_p) \leq \mu_{A_i}(x_p) \right]$$

T es un <u>*Testor Difuso Típico*</u> si cumple:

- T es un Testor Difuso respecto de MA.
- Si $T \subset T'$ y además $sop(T) = sop(T')$, entonces, T′ no es un Testor Difuso con respecto a MA.

Obsérvese como aún cuando esta definición hace algunas consideraciones más amplias que la definición de Zhuravlev, como considerar la posibilidad de que los subconjuntos de rasgos descriptivos puedan ser difusos, sigue considerando las clases del cubrimiento como conjuntos duros.

La tercera extensión del concepto de Testor que presenta una mayor importancia en este trabajo es el *g*-testor o Testor Generalizado de Lazo Cortés [11]. Su importancia se deriva del hecho de que su definición logra abarcar a todas las diferentes definiciones de Testor existentes hasta ese momento, tanto desde el punto de vista duro como del difuso. Examinemos esta definición:

Sea MA una matriz como en el caso anterior. Sea β un funcional de comparación entre parejas de objetos (descripciones), de forma tal que, cuando dos objetos son "semejantes" entonces, $\beta(o_i, o_j) \in Ds$ donde *Ds* es el conjunto de valores que asegura "Descripciones semejantes". Consideremos que a cada objeto se le haga corresponder una tupla de la forma $\alpha(o_i) = (\mu_1(o_i), ..., \mu_k(o_i))$, llamada tupla de pertenencias, donde cada $\mu_j(o_i)$ es el grado de pertenencia de o_i a la clase *j*. Sea v un funcional de comparación entre tuplas de pertenencia de dos objetos en el cubrimiento, de forma tal que cuando las tuplas de dos objetos sean "semejantes", entonces $v(\alpha(o_i),\alpha(o_j)) \in Ps$ siendo Ps el conjunto de valores que indica "Pertenencias semejantes".

Consideremos tambien Ψ como la familia de todos los *g*-testores de MA, y ξ como una relación de orden parcial sobre Ψ (generalmente este orden parcial es la inclusión).

Definición. Un conjunto $\tau = \{x_1 \setminus \mu_1, \ldots, x_r \setminus \mu_r\}$ es un *Testor Generalizado* (g-testor) de MA si, y sólo si

$$\forall o_i o_j \in MA, \left[v(\alpha(o_i),\alpha(o_j)) \notin Ps \Rightarrow \beta_\tau(o_i,o_j) \notin Ds\right]$$

τ es un g-testor *Típico* si, y sólo si, es un g-testor de MA y es minimal en Ψ con respecto a ξ.

El concepto y definición de *g*-testor, así como otras definiciones no mencionadas aquí como los *k*-testores [7], los ε-testores [12], y los testores de Andreev [8] entre otros, forman parte de la Teoría de Testores para Reconocimiento de Patrones. Más allá de proporcionar el punto de partida y la "inspiración" para esta investigación, estos conceptos permiten disponer de una referencia contra la cual poder evaluar los resultados logrados.

3.2. Super-Testores

En el capítulo anterior quedó clara la relación entre el poder discriminante de un conjunto de rasgos descriptivos y la existencia de Testores de Zhuravlev en el mismo cubrimiento. Dicha relación puede ser usada para la construcción de familias más amplias de testores, en particular, aprovechando el concepto del error de discriminación de un subconjunto de rasgos, podemos establecer diferentes grados en los que los objetos de un cubrimiento son confundidos al restringir sus descripciones a los rasgos contenidos en un cierto subconjunto τ de $\Re$.

Sea nuevamente $Z = (O, \Re, \delta, Q, \pi)$ un cubrimiento descriptivo con n objetos cubiertos, k clases o categorías y r rasgos descriptivos.

> ***Definición***. Un <u>*Super-Testor* índice *N*</u> ($s\overline{\tau}_N$), en un cubrimiento descriptivo Z, es un subconjunto $s\overline{\tau}_N \subseteq \Re$ difuso y no vacío, tal que, su error de discriminación acumulado, con respecto al cubrimiento Z, es igual a N.
>
> $$\hat{\varepsilon}_{s\overline{\tau}_N} = N$$
>
> A la magnitud N le llamaremos el *Indice* del Testor.

Esta definición representa una extensión del concepto original de Testor de Zhuravlev en el sentido de tolerar que la confusión en la pertenencia de los objetos a las clases pueda ser diferente a cero, además de abarcar, en el mismo concepto, tanto a los subconjuntos duros como a los subconjuntos difusos de rasgos descriptivos. De esta forma los Testores de Zhuravlev pueden ser vistos como un caso particular (duro) de los Super-Testores.

> ***Proposición.*** Los Testores de Zhuravlev son un caso particular de Super-Testores duros en los que el error de discriminación acumulado, con respecto al subconjunto de rasgos en cuestion, es exactamente cero.

> ***Demostración.*** Sea τ un Testor de Zhuravlev con respecto a un cubrimiento descriptivo Z. En virtud de la definición, τ es tal que, al restringir las descripciones de todos los objetos en el cubrimiento a los rasgos contenidos

en él, no resultan descripciones idénticas en clases distintas[1]. Esto indica que, de forma natural, las grados de pertenencia de cada objeto a todas las clases resultan inalterados ante la reducción del espacio de representación de $\Re$ a τ, por lo que ningún objeto tendrá una pertenencia superior a cero a ninguna intersección entre clases. Por lo tanto, el error de discriminación acumulado del cubrimiento τZ con respecto a τ es estrictamente cero. ❑

De hecho, cualquier elemento del conjunto $P(\Re)\setminus\{\}$ tendrá alguna medida de su error de discriminación y, por lo tanto, todo subconjunto duro y no vacío de $\Re$ es un Super-Testor duro con algún índice N.

Proposición. Un subconjunto τ del conjunto de rasgos descriptivos en un cubrimiento descriptivo Z es un Testor de Zuravlev si y sólo si el poder de discriminación de τ con respecto al cubrimiento Z es igual a uno.

Demostración. (Necesidad y Suficiencia)

Primera parte :

Sea τ un Testor de Zuravlev en un cubrimiento descriptivo Z. Entonces, al restringir las descripciones de los objetos en Z a τ no resultan descripciones iguales en clases diferentes, es decir, el error de discriminación de todos los objetos con respecto a τ es cero pues no existen intersecciones entre parejas de clases que contengan a las descripciones de los objetos, por lo tanto el poder de discriminación de τ deberá ser igual a uno.

Segunda parte :

Sea τ un subconjunto de rasgos descriptivos tal que su poder de discriminación, con respecto a un cubrimiento Z, es uno. Entonces, dado

[1] Evidentemente se trata de el caso en que el Cubrimiento es Duro y Disjunto, pues éste es el único caso contemplado por los Testores de Zuravlev.

que no existen pertenencias negativas, la única forma en que esto puede ocurrir es que todos los objetos en el cubrimiento tengan un error de caracterización igual a cero, lo cual quiere decir que ninguna descripción restringida a τ queda incluida en alguna intersección entre clases, es decir, ninguna descripción restringida se confunde entre clases y por lo tanto τ es un Testor de Zhuravlev. ❑

3.2.1. Jerarquización de las Familias de Super-Testores.

En el proceso de ir logrando la generalización y extensión buscada, puede resultar valioso el detenerse a plantear un contexto más rico para las definiciones obtenidas. Este enriquecimiento en la contextualización servirá un propósito doble: por un lado, afianzará el punto de referencia para los resultados de la investigación y, por otro lado, abrirá puertas para el planteamiento de nuevas investigaciones desde el punto de vista de este trabajo. En este inciso se planteará brevemente un contexto para los Super-Testores que resulta muy atractivo para el análisis de problemas dado el modelo conceptual del primer capítulo.

Partiendo de la definición de Super-Testor resulta cómodo establecer tres niveles en los cuales es posible definir familias de Super-Testores duros o difusos.

Definición. Cualquier Super-Testor, constituye, en sí mismo, una *Familia de Super-Testores en el Nivel* 0 (T_0) con respecto a un cierto cubrimiento descriptivo.

Esta definición sirve como la base recursiva de las definiciones siguientes.

Definición. Una *Familia de Super-Testores en el Nivel 1* (T_1) con respecto a un cubrimiento descriptivo Z, es cualquier conjunto de la forma

$T^m = \{s\tau_N \mid N = m\}$ elementos del nivel T_0, del mismo índice (N), que es posible formar con el conjunto $\Re$ de rasgos descriptivos de dicho cubrimiento.

El nivel T_1 representa la primera aproximación a una familia de Super-Testores que tienen algo en común, el mismo índice. Este tipo de familia puede ser de utilidad en el estudio de las propiedades intrínsecas de un conjunto de rasgos o bien como conjuntos de apoyo para diversos algoritmos de clasificación.

Definición. Una *Familia de Super-Testores en el Nivel 2* (T_2) o *Familia Completa de Super-Testores* con respecto a un cubrimiento descriptivo Z, es el meta-conjunto conteniendo todas las familias T_1 de Super-Testores que es posible formar con el conjunto $\Re$ de rasgos descriptivos de dicho cubrimiento.

Los niveles de familias de Super-Testores están construidos de forma tal que a cada nivel en la jerarquía se le exigen condiciones más estrictas a sus elementos y consecuentemente cada nivel está formado por menos conjuntos :

Nivel 0
Formado por cualquier Super-Testor individual en un cubrimiento. *Condición :* Ser un Super-Testor índice N en el cubrimiento.
Nivel 1
Formado por los Super-Testores del mismo índice en el cubrimiento *Condición :* Tener todos los Super-Testores el mismo índice.
Nivel 2
Formado por todas las familias de nivel 1 en el cubrimiento. *Condición :* Incluir a todas las posibles familias de nivel 1

De esa forma, el nivel T_0, que es el más laxo en cuanto a su condición, puede estar constituido, en el caso duro, hasta por $2^{|\Re|}-1$ elementos distintos, es decir, todos los subconjuntos no vacíos del conjunto de rasgos descriptivos en el cubrimiento. Por otro lado, el nivel T_2, que es el más estricto en cuanto a su condición, está formado por tan solo un elemento, la familia completa de Super-Testores en el cubrimiento.

3.3. Testores por Comparación.

Hasta este punto la definición de Super-Testores, duros o difusos, se ha basado en el mismo concepto: el error de discriminación acumulado, sin embargo, en el desarrollo del capítulo anterior se definió el error de discriminación meramente como un medio para llegar a un concepto mucho más crítico: la cohesión de un cubrimiento. Este concepto aún no ha sido estudiado con suficiente profundidad ni se han examinado sus consecuencias.

3.3.1. Comparación entre cubrimientos.

Las definiciones de cubrimiento Maximal y cubrimiento Minimal permiten realizar una conceptualización distinta de los Testores que se base en diferencias estructurales entre cubrimientos. Para adquirir esta nueva visión el primer paso es revisar la definición clásica del Testor de Zhuravlev y replantearla en términos de comparaciones entre cubrimientos.

En las proposiciones anteriores quedaba establecido que el Testor de Zhuravlev era un caso especial de Super-Testor, duro y con error de caracterización acumulado igual a cero. Este concepto, de forma implícita, está representando una comparación entre dos cubrimientos, el cubrimiento original y el cubrimiento resultante de reducir el espacio de representación de los objetos (τ-reducido). La comparación se realiza mediante el cálculo de los errores de caracterización, es decir, tomando en cuenta las pertenencias a las intersecciones entre parejas de clases, de manera que podemos afirmar que, disponiendo de dos cubrimientos descriptivos con ciertos elementos comunes (conjunto de objetos y conjunto de categorías), siempre es posible llevar a cabo una comparación entre ellos.

Pero ¿cómo se comparan dos cubrimientos?. Para ello es necesario tomar como referencia los elementos invariantes entre ellos. Veamos algunos conceptos y definiciones útiles para la comparación de dos cubrimientos.

Sean $Z_1 = (O, \Re, \delta, Q, \pi_1)$ y $Z_2 = (O, \Re, \delta, Q, \pi_2)$ dos cubrimientos descriptivos sobre el mismo conjunto de objetos, y sobre el mismo conjunto de clases pero distribuidos en virtud de diferentes relaciones de pertenencia.

> ***Definición.*** La _Ganancia Parcial_ ($\Delta_{C_i}^{Z_1,Z_2}$) de un objeto $o_j \in O$ con respecto a una clase $C_i \in Q$, ante la comparación de dos cubrimientos descriptivos Z_1 y Z_2, es la diferencia de las pertenencias del objeto a la misma clase en ambos cubrimientos.
>
> $$\Delta_{C_i}^{Z_1,Z_2}(o_j) = \mu_{C_i}^{\pi_1}(o_j) - \mu_{C_i}^{\pi_2}(o_j)$$
>
> En los casos en que sea perfectamente claro cuáles cubrimientos se están comparando y en qué orden, de forma tal que no exista riesgo de confusión, podremos referirnos a la Ganancia Parcial simplemente como $\Delta_{C_i}(o_j)$.

Este concepto representan el cambio en la pertenencia a una clase por parte de un objeto, esto quiere decir que, en la comparación entre los cubrimientos Z_1 y Z_2, un cierto objeto, puede presentar una pertenencia a una clase, distinta en cada uno de los cubrimientos. Al conjuntar todas las ganancias parciales de una clase es posible conocer la forma global en la que dicha clase resultó modificada ante la reducción del espacio de representación :

Definición. La <u>*Ganancia Acumulada*</u> ($\hat{\Delta}_{C_i}^{Z_1,Z_2}$) de una clase C_i con respecto a dos cubrimientos descriptivos Z_1 y Z_2 es la suma de los valores absolutos de las Ganancias Parciales de todos los objetos en ambos cubrimientos con respecto a dicha clase:

$$\hat{\Delta}_{C_i}^{Z_1,Z_2} = \sum_{j=1..n} \left| \Delta_{C_i}^{Z_1,Z_2}(o_j) \right|$$

Por comodidad resulta conveniente, no sólo calcular la ganancia acumulada, que es una cantidad en el intervalo [0, n], sino obtener un promedio de dicha ganancia que sea una cantidad en [0, 1]

Definición. La <u>*Ganancia Acumulada Promedio*</u> ($\hat{\bar{\Delta}}_{C_i}^{Z_1,Z_2}$) de una clase con respecto a dos cubrimientos descriptivos Z_1 y Z_2 es la media aritmética de la ganancia acumulada de dicha clase:

$$\hat{\bar{\Delta}}_{C_i}^{Z_1,Z_2} = \frac{\hat{\Delta}_{C_i}^{Z_1,Z_2}}{n}$$

Una vez que se ha podido cuantificar la diferencia en la pertenencia de los objetos a cada una de las categorías de los cubrimientos, es posible conocer el efecto de la comparación global entre cubrimientos :

Definición. La <u>*Ganancia Total*</u> ($\hat{\Delta}$) de un cubrimiento descriptivo Z_1 con respecto a otro cubrimiento descriptivo Z_2 es la suma de las ganancias acumuladas de todas las clases en ambos cubrimientos.

$$\hat{\Delta}(Z_1, Z_2) = \sum_{i=1..k} \hat{\Delta}_{C_i}^{Z_1, Z_2}$$

En la misma forma que ocurre con la ganancia acumulada, es posible y conveniente definir una <u>*Ganancia Total Promedio*</u> como

$$\hat{\cancel{\Delta}}(Z_1, Z_2) = \frac{\hat{\Delta}(Z_1, Z_2)}{k}$$

Aunque de forma global la comparación entre dos cubrimientos está representada por la ganancia total, esta sola medida puede no dar suficiente información. En muchas ocasiones conocer las ganancias acumuladas de las clases puede ser mucho más ilustrativo de las diferencias entre dos cubrimientos, por ello suele ser cómodo hacer uso de la siguiente

Definición. Una <u>*Tupla de Diferencia*</u> entre dos cubrimientos descriptivos es una tupla de la forma $\left(\hat{\cancel{\Delta}}_{C_1}, \ldots \hat{\cancel{\Delta}}_{C_k}\right)$, donde cada elemento es la ganancia acumulada promedio de la categoría correspondiente en los cubrimientos.

3.3.2. <u>***Δ-Testores.***</u>

Una vez que se han provisto algunas de las posibles herramientas para la comparación de dos cubrimientos descriptivos con ciertas características comunes, se puede hacer uso de dichas comparaciones como la base para encontrar nuevos tipos de conjuntos Testores. La clave para esto radica en la observación de que, en todas las definiciones anteriores se supone un conjunto de objetos común a ambos cubrimientos, así como también un mismo conjunto de clases o categorías, sin embargo, no se hace ninguna restricción sobre los conjuntos de rasgos descriptivos que, de hecho podrían ser distintos sin afectar con ello las medidas de comparación. En realidad, la definición original de Testor de Zhuravlev tiene implícita una comparación entre dos cubrimientos que tienen diferente conjunto de rasgos: un cubrimiento con el conjunto original $\Re$ y el otro con un subconjunto de éste.

En el momento de efectuar sobre el cubrimiento original una Reducción del espacio de representación de los objetos, se está produciendo otro cubrimiento, descrito en función de un conjunto de rasgos menor y, por lo tanto, con posibles diferencias en su distribución de objetos sobre las categorías.

Dado que un cubrimiento τ-reducido tiene exactamente el mismo conjunto de objetos en estudio y también el mismo conjunto de categorías que aquel que le dió origen, es factible emplear los conceptos anteriores para compararlo con su cubrimiento origen.

Proposición. Un subconjunto $\tau \subseteq \Re$ de rasgos descriptivos en un cubrimiento descriptivo Z, es un Testor de Zhuravlev, si y sólo si la ganancia total de Z, con respecto a su cubrimiento τ-reducido, es exactamente cero.

Demostración. (Necesidad y Suficiencia)
Primera Parte:
Sea τ un Testor de Zhuravlev en un cubrimiento descriptivo Z. Entonces, al restringir la descripción de todos los objetos en Z a los rasgos contenidos en τ, no se producen descripciones idénticas en clases distintas, por lo tanto las clases permanecen inalteradas ante la reducción. Dado que las clases permanecen inalteradas es claro que, la ganancia acumulada de todas las clases en el cubrimiento será igual a cero y por lo tanto la ganancia total del cubrimiento con respecto al τ-reducido será también cero.

Segunda Parte:

Sean Z_1 y Z_2 dos cubrimientos descriptivos tales que, Z_2 es τ-reducido con respecto a Z_1 y la ganancia total de Z_1 con respecto a Z_2 es exactamente cero. Para que esto sea posible, es necesario que las ganancias acumuladas de todas las clases sean cero, implicando que no existe ninguna diferencia en la pertenencia de los objetos a las clases en Z_1 y en Z_2, por lo tanto, se infiere que, tras la restricción de las descripciones, no se generaron descripciones idénticas en clases distintas, luego entonces τ debe ser un Testor de Zhuravlev en Z_1. ❑

Una vez identificada la forma en que un Testor de Zhuravlev está comparando implícitamente dos cubrimientos, es fácil comprender que es posible partir de la misma idea que en los casos anteriores para extender la definición y lograr una familia de testores más amplia que las actuales.

Definición. Un <u>*Δ-Testor*</u> ($\Delta\tau$), en un cubrimiento descriptivo Z, es un subconjunto de rasgos descriptivos tal que, la ganancia total resultante de la comparación entre dos cubrimientos que cumplan las condiciones de semejanza planteadas, es exactamente Δ.

El concepto de Δ-Testor planteado es demasiado general pues no especifica cuáles dos cubrimientos deben ser comparados. Esta generalidad nos permite explotar el concepto de diversas formas creando familias más específicas de testores en las cuales quede bien establecido cuáles cubrimientos deben ser comparados. De estas definiciones la más notoria resulta ser :

Definición. Un <u>*Δ-Testor por Reducción*</u> ($\Delta\tau$) en un cubrimiento descriptivo Z, es un Δ-Testor resultado de la comparación entre dicho cubrimiento y su cubrimiento τ-reducido, para algún subconjunto τ difuso.

Al definir este tipo de testores estamos permitiendo que cualquier subconjunto de rasgos, en un cubrimiento, pueda ser Δ-Testor para algún Δ dado. Así se conforma una familia de Testores para el cubrimiento que incluye a los tradicionales Testores de Zhuravlev. Al igual que en el caso de los Super-Testores duros, resulta conveniente visualizar esta familia en tres niveles distintos: el nivel 0 constituido por testores individuales; el nivel 1 constituido por todos los testores del mismo Δ y; el nivel 2 constituido por todas las posibles familias de nivel 1 que se pueden formar con un cubrimiento dado.

Proposición. Un Testor de Zhuravlev en un cubrimiento Z, es un Δ-Testor por reducción índice cero para el mismo cubrimiento.

Demostración. Sea τ un Testor de Zhuravlev en el cubrimiento descriptivo Z. En virtud de la definición original, al reducir el espacio de representación de Z al subconjunto τ, no resultan descripciones idénticas en clases distintas. La reducción en el espacio de representación está implicando la generación de el cubrimiento τ-reducido y el hecho de que al comparar ambos cubrimientos no resulten descripciones idénticas en clases distintas implica que la distribución estructural de Z y de τZ es exactamente la misma, por lo que la ganancia acumulada de todas las clases será cero y por lo tanto, la ganancia total también será cero. ❑

Bajo la perspectiva de las definiciones de ganancia, la comparación entre dos cubrimientos requiere el mismo conjunto de objetos y el mismo conjunto de clases (etiquetas), sin embargo, no es necesario que el conjunto de rasgos descriptivos sea igual (como ocurre en el caso de los cubrimientos τ-reducidos), así pues, siempre es posible definir conjuntos Δ-Testores para dos cubrimientos cualesquiera que cumplan las condiciones de semejanza previamente planteadas. En particular, parece atractivo buscar, dado un cubrimiento descriptivo, el cubrimiento más apropiado para ser comparado. El criterio usado en la selección de dicho cubrimiento proporcionará información valiosa sobre la importancia de los conjuntos testores obtenidos mediante la comparación. Entre los cubrimientos que resultan más interesantes para realizar comparaciones, se encuentran el maximal y el minimal de una cierta familia de cubrimientos.

Comparar un cubrimiento contra el maximal de su familia, es averiguar qué tan "cerca" se encuentra de la mejor distribución posible de sus objetos en el conjunto de clases. Aún cuando la simple comparación de las cohesiones correspondientes puede proporcionar esa información de manera global, la obtención de las ganancias asociadas a las clases desgloza los datos y muestra un panorama de la forma en que "cambia" cada clase e incluso cada objeto de un cubrimiento a otro. No parece existir ninguna relación entre la diferencia de cohesiones y la forma en que se presentarán las ganancias correspondientes. Tomando en cuenta ésto, parece razonable, dado un cubrimiento τ-reducido, compararlo con el cubrimiento maximal o minimal en la familia de su cubrimiento original.

Sea $Z = (O, \Re, \delta, Q, \pi)$ un cubrimiento descriptivo en una familia completa Φ^* cuyos cubrimientos maximal y minimal son respectivamente Z^+ y Z^-. Sea τZ el cubrimiento τ-reducido de Z dado un subconjunto difuso $\tau \subseteq \Re$.

> ***Definición.*** Un *Δ-Testor por Cohesión* ($\Delta\tau$) en un cubrimiento descriptivo Z, es un Δ-Testor resultado de la comparación entre el cubrimiento maximal en la familia completa que contiene a Z, y el cubrimiento τ-reducido.

Parece razonable que, ante una reducción en el espacio de representación, sea deseable utilizar aquel subconjunto de rasgos que conserve la máxima cohesión posible en el cubrimiento o, equivalentemente, el que produzca un cubrimiento lo más parecido estructuralmente a un cubrimiento maximal en la familia. Dado que el cubrimiento maximal Z^+ en la familia Φ^* no forzosamente es único, se pueden obtener diferentes conjuntos de Δ-Testores por cohesión que correspondan a la comparación con cada uno de los cubrimientos maximales en la familia. Evidentemente serán de mayor interés aquellos que logren una Δ menor, puesto que serán éstos los subconjuntos de rasgos que logran generar cubrimientos estructuralmente más parecidos a algún cubrimiento de cohesión máxima en la familia.

3.4. Tipicidad.

Tal como lo establece la definición del *g*-testor (ver iniciso ***3.1***), todas las definiciones clásicas de Testor Típico se hacen considerando alguna relación de orden sobre la familia de posibles Testores y seleccionando aquellos subconjuntos que sean optimales con respecto a ella. En la mayoría de los casos tal relación es la inclusión $\tilde{\subseteq}$ (dura o difusa). Esto obedece a que aquellos subconjuntos de rasgos descriptivos que sean minimales con respecto a la inclusión resultan muy atractivos en la solución de problemas pues reducen costos económicos y computacionales. Sin embargo, después de haber replanteado el panorama de los Testores, parece evidente que la relación de inclusión no es el único criterio que resulta atractivo optimizar. En particular, la cohesión producida por un subconjunto de rasgos, al realizar reducciones en el espacio de representación de un cubrimiento descriptivo, es otro criterio igual o más atractivo, tanto desde el punto de vista teórico como del práctico, de la misma manera, otros criterios pueden resultar importantes en situaciones particulares.

Por lo tanto, nuestra definición de tipicidad estará orientada a formalizar un concepto de tipicidad donde sea factible optimizar más de un criterio a la vez, así como a establecer algunas combinaciones especialmente útiles de criterios. Para formalizar el concepto recurriremos, una vez más, a la facilidad conceptual que nos ofrece la opción de separar en varios niveles de complejidad las exigencias planteadas, esta idea nos lleva a la formulación de una nueva definición de tipicidad:

Definición. Un <u>*Testor (de cualquier tipo) Típico de n-ésimo Orden*</u> con respecto a un cubrimiento descriptivo Z, es un Testor (del tipo en cuestión) en el cubrimiento tal que, optimiza, en orden jerárquico, n criterios o relaciones de orden.

Así, un Super-Testor índice N Típico de Primer Orden es aquel que optimiza sólo un criterio u ordenamiento, éste puede ser, por ejemplo, la relación de inclusión o bien, la relevancia relativa de los rasgos componentes, etc., pero un Super-Testor índice N de Segundo Orden deberá optimizar dos criterios a la vez.

En el caso de los Δ-Testores resultan importantes dos criterios: la inclusión y la cohesión. Un Δ-Testor por Reducción Típico de Primer Orden puede ser maximal en cuanto a la cohesión del cubrimiento τ-reducido que produce y un Δ-Testor por Cohesión Típico de Segundo Orden puede maximizar la magnitud Δ y minimizar la inclusión al mismo tiempo.

Muy importante resulta el hecho de que, como un cubrimiento τ-reducido no comparte el mismo conjunto de rasgos descriptivos que su cubrimiento origen, entonces no pertenece a la misma familia, así que, dado un cubrimiento descriptivo, es posible crear una familia de cubrimientos formada por todas las τ-reducciones posibles para dicho cubrimiento ($2^{|\Re|}-1$ en el caso de subconjuntos duros, ∞ en el caso de subconjuntos difusos). Dentro de esta nueva familia de τ-reducciones, ya sea dura o difusa, se puede establecer la misma relación de orden $\prec_\Psi$ (orden con respecto a la cohesión) y es posible distinguir algunos cubrimientos como maximales. Por otra parte, en virtud del algoritmo de reducción, la cohesión de un cubrimiento τ-reducido siempre será menor o igual que la de su cubrimiento original. En este sentido trataremos de buscar aquellos suconjuntos τ tales que logren la máxima cohesión posible

De forma general, un Testor Típico de cualquier orden, se expresa indicando tanto el orden que representa como el conjunto de criterios u órdenes que optimiza:

$$\tau^{n}{}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}$$

en este caso se trata de el subconjunto de rasgos τ que constituye un Testor Típico de Orden n y que optimiza los criterios α, β, γ, etc.

Proposición. Los Testores Típicos de Zhuravlev son Super Testores índice 0 Típicos de Primer Orden y también 0-Testores por Reducción Típicos de Primer Orden.

Demostración. Basándose en las proposiciones demostradas anteriormente se tiene claro que un Testor de Zhuravlev es un Super-Testor índice 0 y también un 0-Testor por Reducción. En ambos casos la relación de orden parcial que se optimiza es la inclusión dura.

Por último examínense las siguientes definiciones a manera de ejemplos sobre tipos interesantes de Testores Típicos.

Definición. Un *Δ-Testor por Reducción Típico de Primer Orden* ($\Delta\dot{\tau}_Z$) con respecto a la inclusión, en un cubrimiento descriptivo Z, es un Δ-Testor por reducción tal que, es minimal con respecto a $\subseteq$ (inclusión dura o difusa) en la familia de τ-reducciones de Z.

Definición. Un *Δ-Testor por Reducción Típico de Segundo Orden* ($\Delta\ddot{\tau}_Z$) con respecto a la cohesión y la inclusión, en un cubrimiento descriptivo Z, es un Δ-Testor por reducción típico de primer orden tal que, es maximal con respecto a $\prec_\Psi$ en la familia de τ-reducciones de Z y, es minimal con respecto a la inclusión (dura o difusa).

Definición. Un *<u>Δ-Testor por Cohesión Típico de Tercer Orden</u>* ($\Delta\dddot{\tau}_Z$) con respecto a la ganancia, la cohesión y la inclusión, en un cubrimiento descriptivo Z, es un Δ-Testor por cohesión tal que, su Δ es máxima entre las posibles Δ's resultado de la comparación contra todos los cubrimientos maximales en la familia completa que contiene a Z, es maximal con respecto a la cohesión de las τ-reducciones de Z y, es minimal con respecto a la inclusión dura o difusa.

CONCLUSIONES.

Sin importar cuán largo o fructífero haya sido el resultado de una investigación, es siempre necesario hacer una pausa, no para regocijarse en los logros obtenidos, sino para crear conciencia de las rendijas y grietas que se abrieron en el camino. Sólo el intelecto humano es capaz de convertir esas rendijas en puertas y luego aventurarse en la conquista de los caminos y veredas que se encuentran tras de ella.

El estudio realizado sobre la naturaleza lógica de los testores y su contextualización en el campo del Reconocimiento de Patrones, han sido orientados, en todo momento, por el afán de generalizar y englobar la mayor cantidad posible de conocimiento, descubriendo en el camino, nuevos enigmas, a la vez que logrando un nivel de abstracción superior y, por lo tanto, un más alto nivel de conocimiento. Las extensiones y generalizaciones logradas en este trabajo resultan logros muy modestos al ser comparados con las posibilidades de estudio e investigación que se han abierto y se plantean ante nosotros. En este último capítulo evaluaremos las bondades y deficiencias de las definiciones planteadas e intentaremos resaltar las zonas que llaman a estudios más profundos desde las nuevas perspectivas.

4.1. El Modelo Conceptual.

Aunque, aparentemente, la definición de cubrimiento y de los diversos problemas que ataca el Reconocimiento de Patrones resulta ser un mero pretexto de contextualización, el modelo conceptual planteado presenta diversas bondades. En realidad, el proceso mental, durante la investigación, se dá en el sentido opuesto, es gracias al modelo general que es posible abordar el estudio de los testores como una consecuencia de las propiedades de los cubrimientos.

Varios son los cambios hechos sobre los conceptos clásicos, el cubrimiento, que es el elemento central en este trabajo, es un concepto que no responde de forma exacta, ni a la definición matemática clásica de cubrimiento (Teoría de conjuntos), ni a la difinición geométrica (Geometría Diferencial), ni a los modelos de aprendizaje manejados actualmente en problemas de clasificación supervisada, siendo la modificación más notoria, la inclusión de los rasgos descriptivos y la relación misma de descripción.

Durante las primeras etapas de estudio, se llegó a desarrollar la idea de que en toda muestra de aprendizaje (cubrimiento) debía existir un *Clasificador Implícito* que, en ese momento, se modeló como un conjunto de predicados lógicos descriptivos de cada una de las clases. La forma de tal clasificador impícito se planteó como $\Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_k\}$,con $\mathbf{\Phi}_i$ como el *Predicado Descriptivo* característico de la clase i. Cada predicado descriptivo tenía la estructura: $\Phi_i\colon \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r$, siendo ϕ_j un *Predicado Parcial* que caracterizaba los valores tomados por el rasgo x_j en los objetos de la clase C_i.

Al disponer de una caracterización lógica por rasgo de cada una de las clases, el proceso de reducción en el espacio de representación de la muestra se realizaría substituyendo el máximo valor de verdad en aquellos predicados parciales que caracterizaran a los rasgos que serían reducidos y después evaluando cada predicado descriptivo en todos los objetos o descripciones de objetos en la muestra. El resultado esperado era que la evaluación lógica de tales predicados (grado de verdad), correspondiera con el grado de pertenencia del los objetos a cada una de las clases.

Sin embargo, dicho modelo no fructificó pues planteaba problemas de modelación difusa que terminaban por restringir más que por generalizar. El replanteamiento de una relación de pertenencia como parte del cubrimiento y como el verdadero elemento clasificador (explícito en esta ocasión), permitió abordar los problemas desde una perspectiva totalmente diferente y mostró de forma clara que el algoritmo de reducción para espacios de representación constituía la base formal de los testores vistos como un "fenómeno" que ocurría en los cubrimientos. El modelo de caracterización de clases, muy al estilo de los algoritmos de Clasificación Conceptual presentan algunas bondades para la modelación de problemas más concretos. Lejos de abandonarlo la pretensión es la de poder retomarlo en otro contexto y aprovechar sus características de abstracción.

El hecho de formalizar el concepto de cubrimiento mediante una estructura que incluye conjuntos y relaciones sobre dichos conjuntos, proporciona el encapsulamiento ideal parra recorrer y acortar la distancia entre el Reconocimiento de Patrones y la Teoría de Sistemas Formales. En particular, la inclusión de los rasgos descriptivos como parte de la estructura del cubrimiento, solucionó varios de los problemas de consistencia en el modelo conceptual. En un momento dado, se requería que las definiciones de problemas de clasificación supervisada y no supervisada, fueran deducibles a partir de una definición más general de problema de clasificación. Aún cuando se podía haber solucionado el problema incluyendo el conjunto de rasgos y la relación descriptiva en la definición de los problemas, resultó mucho más rico incluirlos en el cubrimiento mismo, de esa manera no sólo se pudieron modelar los diferentes tipos de cubrimientos, sino que, se pudo modelar el problema de clasificación parcialmente supervisado que originalmente no se tenía contemplado.

En general, el modelo conceptual al que se llegó, constituye una opción totalmente nueva y diferente para enmarcar la teoría de Reconocimiento de Patrones y en particular la Teoría de Testores. Permitió incorporar en la formalización, las sutilezas propias del área y las experiencias adquiridas (en gran parte un modelo cognoscitivo empírico), sin alejarse de la estabilidad y consistencia ofrecida por los sistemas formales.

4.2. <u>Los Testores</u>.

Siendo los Testores el objetivo concreto de esta investigación, es natural que los logros más relevantes hayan sido conseguidos justamente en esta área. Tratándose del campo de las extensiones y generalizaciones, es fácil encontrarse en un callejón sin salida, desde el cual se puede observar que, aún contando con una amplia gama de enfoques e investigaciones, realizadas por especialistas con diferentes formaciones, el modelo (o los modelos) comunmente usados para un tipo de problemas específico, se "agota" conceptualmente y ya no resulta útil para continuar los procesos de abstracción. Es entonces cuando se vuelve indispensable voltear la vista hacia nuevos modelos que posean la flexibilidad necesaria para desbordar la capacidad teórica y práctica actual y nos coloquen ante la posibilidad de establecer nuevas fronteras.

El ajuste más novedoso en la visión de los Testores planteada en esta investigación, es el de concebir al Testor como el responsable de producir, sobre un cubrimiento, el fenómeno de cambio en la pertenencia de los objetos a las clases. La comparación entre dos cubrimientos descriptivos que satisfacen condiciones de comparabilidad, como el modo de descubrir los subconjuntos de rasgos que tienen mayor influencia discriminante, abrió las puertas para lograr la generalización mas importante: el Δ-Testor. Poder redefinir el Testor de Zhuravlev en términos de comparación entre cubrimientos, conservando intacto el concepto original pero "descubriendo" en él motivaciones sutiles u ocultas, fue, sin lugar a dudas, el giro conceptual más importante de este trabajo.

Durante el estudio del modelo de caracterización de clases, ya se tenía clara esta idea de comparar cubrimientos para evaluar el poder discriminante de un subconjunto de rasgos, pero se consideraba que una reducción en el espacio de representación de un cubrimiento podía producir una modificación estructural que incluso cambiara el número de clases y/o las intersecciones entre éstas. Esta falta de acotamiento en las condiciones de la reducción, exigía la determinación de algoritmos precisos para determinar el comportamiento de un cubrimiento a través de una serie de transformaciones y, peor aún, no mostraba señales de que, aún cuando tal algoritmo se encontrara, tuviera las características deseables de unicidad, distinguibilidad y reversibilidad. Nuevamente, fue gracias al algoritmo de reducción que se hizo posible formalizar el índice de un Testor como la medida de cambio producida en un cubrimiento al ser transformado en otro, equivalentemente, el índice Δ en un Δ-Testor, representa la diferencia en la distribución de objetos, que presentan dos cubrimientos descriptivos comparables.

Una vez establecido este formalismo, se podía aspirar a generalizar. Los conceptos subyacentes a las definiciones de los ε-Testores [12], los μ-Testores (Testores en cierto grado) [], y los Conjuntos irreducibles de rasgos [7], proporcionaron la idea original de tolerar diferencias entre cubrimientos diferentes de cero, y seguir considerando al subconjunto de rasgos como un candidato a testor "en algún grado". Posteriormente, la elección de qué cubrimientos comparar motivó la generalidad de los Δ-Testores, incluso a límites no explorados por la teoría pero muy atractivos para futuros estudios.

En el camino de lograr la formalización de la cohesión, surge como primer elemento el concepto del error de caracterización de un objeto y posteriormente de un subconjunto de rasgos. Este concepto, en sí mismo resultaba suficiente para explicar al Testor de Zhuravlev, y de forma evidente, sugería una extensión no contemplada previamente. La aparición del Super-Testor constituyó realmente una "puerta lateral" con el suficiente atractivo para no dejarla pasar sin incluirla en esta investigación. Lejos de parecer redundante, se trata de una aproximación al problema de los Testores que, si se estudia y desarrolla más, ligándola de forma más contundente con el concepto de cohesión (u otros conceptos semejantes como la Tipicidad y Contraste), puede proveer de un campo amplio para la realización de investigaciones y desarrollos prácticos.

4.3. La Tipicidad.

La cohesión, representa una extensión del modelo conceptual, en el sentido de admitir la necesidad de exigir, a los conjuntos Testores, condiciones más fuertes que simplemente "no causar errores de caracterización". Estableciendo las características más deseables en cualquier cubrimiento, se vuelve evidente que, para muchas situaciones prácticas, un mayor conocimiento de las condiciones de las categorías en los cubrimientos, permite ajustar los algoritmos de clasificación e incluso ponderar de forma distinta los resultados de los algoritmos de cálculo de relevancias. De esta forma, exigir en un Testor que propicie reducciones con la cohesión más alta posible, se vuelve no sólo admisible sino necesario.

Así pues, las dos condiciones requeridas a un subconjunto de rasgos, para considerarlo como un Testor Típico son generalmente: **1)** ser un Testor y, **2)** ser minimal con respecto a la inclusión preservando sus características de discriminación. El hecho de establecer nuevos tipos de Testores Típicos que añadieran una condición más a la lista (optimalidad con respecto a la cohesión), no resultaba lo suficientemente abstracto para justificar una buena extensión, de forma tal que, definiendo el concepto de tipicidad de forma paramétrica y permitiendo cualquier nivel deseado de exigencias (mediante los Ordenes de los Testores Típicos), se logró establecer una base teórica mucho más amplia y flexible que los conceptos expresados por el *g*-Testor Típico.

BIBLIOGRAFIA.

[1] "Acerca de los Testores para esquemas eléctricos"
Cheguis I.A., Yablonskii S.V.
Uspieji Matematicheskij Nauk 4, (66) pp.182 - 184, 1955.(en ruso)
citado en [11]

[2] "Acerca de los principios matemáticos de la clasificación de objetos y fenómenos"
Dmitriev A.D., Zhuravlev Yu I, Krendeleiev F. P.
Diskretnyi Analiz 7. Pp.3 - 15, 1966. (en ruso)
citado en [11]

[3] "Una generalización del concepto de Testor"
Lazo Cortés M.
Aportaciones Matemáticas - Serie Comunicaciones (14) pp.283 - 288.
Memorias del XXVI Congreso de la SMM. México 1994.

[4] "Problemas de la teoría de los Test Difusos"
Goldman R.S.
Avtomática I Telemejanika 10, pp.146 - 153, 1980. (en ruso)
citado en [11]

[5] "Extensión del concepto de Test Típico a partir de la función de analogía entre patrones".
Alba Cabrera, E., Nancy López Reyes y J. Ruiz Shulcloper.
art. en Tópicos acerca de la Teoría de Testores.
CINVESTAV-IPN Serie Amarilla 134 ,1994.

[6] "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning"
Zadeh L. A.
en K.S. Fu & J.T. Tou, (Eds), "Learning systems and Intelligent Robots"
Plenum Press, New York, 1 - 10, 1974.

[7] "K-Testores primos"
Ruiz Shulcloper J. y Lazo Cortés M.
Ciencias Técnicas, Físicas y Matemáticas 9, pp. 17 - 55, 1991.

[8] "On Irredundant and minimal Test"
Andreev A. E.
Soviet Mathematics Doklady 23, (1) pp. 92 - 96, 1981.

[9] "Modelos Matemáticos para el Reconocimiento de Patrones".
Ruiz Shulcloper J y M. Lazo Cortés.
Instituto Tecnológico de Toluca. [En prensa] ,1993.

[10] "Desarrollo de un algoritmo para el análisis de datos y clasificación tipo Tipicidad y Contraste".
Vega Alvarado L.
Tesis de Licenciatura.
ENEP-Acatlán (UNAM)., 1995.

[11] "Modelos Basados en la teoría de testores para la selección de rasgos y clasificación supervisada con descripciones no clásicas de los objetos".
Lazo Cortés M.
Tesis de Doctorado.
Universidad Central de las Villas, CUBA, 1994.

Este texto fue editado usando las siguientes
herramientas de software :

Microsoft Word for Windows 6.0 y 7.0
Microsoft Equation Editor 2.0a.

Los abajo firmantes, integrantes del jurado para el examen de grado que sustentará el C Salvador Godoy Calderón, declaramos que hemos revisado la tesis titulada:

"GENERALIZACION DE LOS CONCEPTOS DE TESTOR Y TESTOR TIPICO PARA ENTORNOS DIFUSOS"

y consideramos que cumple con los requisitos para obtener el grado de Maestro en Ciencias, con especialidad en Ingeniería Eléctrica.

Atentamente

Dr. José Angel Lodegario Ortega Herrera ______________________

Dr. Manuel Sabino Lazo Cortés ______________________

Dr Carlos Zozaya Gorostiza ______________________

Dr. Raúl Irena Estrada ______________________

AUTOR GODOY CALDERON, SALVADOR

TITULO GENERALIZACION DE LOS CONCEPTOS DE TESTOR Y TESTOR TIPICO

CLASIF. XM 96.14 RGTRO. BI 14844

NOMBRE DEL LECTOR	FECHA PREST.	FECHA DEVOL.
Sofia Meza	14/03/97	3/Abr./97
Fotocopiado- Rep. Téc.	21abr97	21abr97