Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección de Computación

Coloraciones Mínimas de Matrices Intercaladas

Tesis que presenta el Ing. Francisco Javier Zaragoza Martínez para obtener el grado de Maestro en Ciencias dentro de la especialidad de Ingeniería Eléctrica con opción en Computación.

Trabajo dirigido por:

- Dr. Isidoro Gitler Goldwain (CINVESTAV, Departamento de Matemáticas)
- M. en C. Feliú Sagols Troncoso (CINVESTAV, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Computación)

México, D.F.

Becario CONACYT 69234

Este trabajo está dedicado a:

Rosa Reséndez

mis padres y hermanas

mis amigos y compañeros

Contenido

Resumen

Una matriz es intercalada si no tiene colores repetidos a lo largo de cada renglón o columna y si tiene dos o cuatro colores en cada una de sus submatrices 2×2. En el presente trabajo estudiamos la conjetura de Yuzvinsky (CY) acerca del número mínimo de colores que se necesitan para colorear una matriz intercalada.

El problema de matrices intercaladas tiene aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y ciencias de la computación, como se muestra en la sección 1.

En la sección 2 presentamos dos pruebas distintas para el caso diádico de la CY, la primera dada por Yuzvinsky y la segunda por Eliahou y Kervaire.

En la sección 3 demostramos que el conjunto de matrices no intercaladas es una variedad algebraica y reformularemos la CY en términos de esta caracterización.

En la sección 4 mostramos algunos resultados sobre matrices intercaladas diádicas y no diádicas.

En la sección 5 estudiamos las particiones de los colores en ciertas matrices intercaladas.

En la sección 6 demostramos que la CY es cierta para matrices de orden $5 \times s$ y establecemos qué se necesita para probar que la CY es cierta para matrices con orden menor a 32×32.

Finalmente, en la sección 7 presentamos diversos algoritmos que se han usado para generar matrices intercaladas y para verificar algunas de sus propiedades.

Abstract

A matrix is intercalate if it hasn't repeated colors along each row or column and if it has two or four colors in each of its 2×2 submatrices. In this work we study Yuzvinsky's Conjecture (YC) about the minimal number of colors needed to fill an intercalate matrix.

The intercalate matrix problem has applications in mathematics and computer sciences, as shown in section 1.

In section 2 we present two different proofs for the dyadic case of YC, the first given by Yuzvinsky and the second by Eliahou and Kervaire.

In section 3 we show that the set of intercalate matrices is an algebraic variety and we reformulate YC in terms of this characterization.

In section 4 we show some results on dyadic and non dyadic intercalate matrices.

In section 5 we study the color partitions in a special case of intercalate matrices.

In section 6 we verify that YC is true for matrices with order $5 \times s$ and we establish what do we need to prove that YC is true for matrices with order smaller than 32×32.

Finally, in section 7 we present several algorithms used to generate intercalate matrices and to test some of their properties.

1 Introducción

En esta sección presentaremos algunos de los conceptos fundamentales sobre matrices intercaladas, así como algunos de los resultados más conocidos relacionados con ellas. Finalmente, presentaremos algunas aplicaciones que involucran a las matrices intercaladas. En lo sucesivo, nos referiremos a las posiciones de una matriz por *coordenadas* y a sus entradas por *colores*.

Una matriz es *pseudolatina* si no tiene colores repetidos a lo largo de cada renglón o columna. Si además tiene dos o cuatro colores en cada una de sus submatrices 2×2 entonces se dice que es *intercalada*. Una matriz intercalada es de *tipo* (r, s, n) si tiene r renglones, s columnas y n colores distintos.

Ejemplo 1.1 *Una matriz intercalada de tipo (3,3,4):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Una submatriz 2×2 es una *intercalación* si tiene dos colores, en otro caso se llama *cointercalación*.

Dos matrices intercaladas son *isotópicas* si se puede llegar de una a la otra usando permutaciones de renglones y columnas y, de ser necesario, renombrando sus colores.

Dados r y s, es de nuestro interés encontrar la mínima n tal que existe una matriz intercalada de tipo (r, s, n). Denotaremos por $N(r, s)$ a ese valor mínimo de n. Se dice que tales matrices tienen *coloraciones mínimas* o que son *óptimas*.

Ejemplo 1.2 *La matriz del ejemplo anterior y la siguiente tienen coloraciones mínimas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una conjetura de Yuzvinsky [Yuz] que ha permanecido abierta por más de una década es la siguiente:

Conjetura 1.1 *Toda matriz intercalada de tipo* (r, s, n) *satisface que* $n \geq r \circ s$, *donde* $r \circ s$ *es la función de Pfister.*

Se puede calcular $r \circ s$ recursivamente como sigue:

$$r \circ s = \begin{cases} s \circ r & \text{si } r > s \\ r & \text{si } s = 1 \\ 2^{t-1} + r \circ (s - 2^{t-1}) & \text{si } r \leq 2^{t-1} < s \\ 2^t & \text{si } 2^{t-1} < r, s \leq 2^t \end{cases}$$

Yuzvinsky demostró [Yuz] que esta conjetura es cierta en el caso donde se supone adicionalmente que las matrices intercaladas son submatrices de la tabla de Cayley del grupo diádico. Para una caracterización de este tipo de matrices ver [CGM1].

Aún cuando el caso diádico de este problema está completamente resuelto, es interesante notar que poco se sabe sobre el caso general, de hecho, hasta ahora sólo se han resuelto completamente los rangos $r, s \leq 16$ y $r \leq 5$. [Yiu2, CEGMZ] Es de gran interés obtener una solución completa para el rango $r, s \leq 32$, sobre todo por la fuerte relación que tiene este problema con el problema de producto de sumas (PPS). [Sh]

El PPS sobre los enteros es el siguiente: dados tres números naturales r, s, n decidir si acaso existe una fórmula del tipo

$$(x_1^2 + \cdots + x_r^2)(y_1^2 + \cdots + y_s^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

donde x_i (para $1 \leq i \leq r$) y y_j (para $1 \leq j \leq s$) son indeterminadas y cada z_k (para $1 \leq k \leq n$) es una forma bilineal en x y y con coeficientes enteros. Cuando tal fórmula existe, se dice que la tripleta (r, s, n) es *admisible.*

Es bien sabido que la tripleta (r, s, n) es admisible si y sólo si existe una matriz intercalada de tipo (r, s, n) que se puede signar consistentemente, es decir, si se pueden otorgar signos $+1$ o -1 a cada una de las coordenadas de la matriz intercalada de modo que en cualquier submatriz 2×2 con exactamente dos colores el producto de sus signos sea -1, y arbitrario en otro caso.

Ejemplo 1.3 *A partir de la siguiente matriz intercalada signada de tipo* $(4, 4, 4)$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & +2 & +3 & +4 \\ +2 & -1 & -4 & +3 \\ +3 & +4 & -1 & -2 \\ +4 & -3 & +2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

se deduce que la tripleta $(4, 4, 4)$ *es admisible ya que se puede obtener la fórmula*

$$\begin{aligned} z_1 &= +x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 \\ z_2 &= +x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3 \\ z_3 &= +x_1y_3 + x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2 \\ z_4 &= +x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1 \end{aligned}$$

donde la variable x_i *corresponde con el renglón* i. y_j *con la columna* j *y* z_k *con el color* k $(1 \leq i, j, k \leq 4)$.

Es claro que el número de colores en una matriz intercalada signable es mayor o igual al número de colores en una matriz intercalada del mismo orden con coloración mínima. Es más, también se sabe que las matrices intercaladas signables cumplen con la conjetura de Yuzvinsky. [CEGMZ]

Reformulación en teoría de gráficas

Considere la gráfica bipartita completa $K_{r,s}$ y una asignación de colores en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ a sus aristas tal que:

1. Cada par de aristas incidentes en un vértice tienen color distinto.

2. Todo ciclo de longitud cuatro tiene dos o cuatro colores.

Es claro ver que tal coloración existe si y sólo si existe una matriz intercalada de tipo (r, s, n). En efecto, asocie cada uno de los r renglones y s columnas de la matriz con un vértice, de modo que las aristas de $K_{r,s}$ queden en correspondencia con las coordenadas de la matriz. Las tres propiedades de intercalación garantizan que la coloración de la gráfica satisface las dos condiciones anteriores.

Además, también se puede introducir la condición de signabilidad: A cada arista se le otorga un signo + o − de modo que en todo ciclo de longitud cuatro con exactamente dos colores exista una cantidad impar de signos −.

Aplicación a conocimiento común

El conocimiento común se refiere al hecho de que varias entidades (personas, procesadores, etc.) conozcan la misma información (secretos, datos, etc.).

En ciertas situaciones (como las subastas y las elecciones) es importante que las entidades adquieran ese conocimiento de una forma justa, es decir, si en cierto instante una entidad A adquiere una unidad de información conocida por otra entidad B, entonces en ese mismo instante B adquiere una unidad de información conocida por A.

Supongamos que tenemos s procesadores $(P_1, \ldots, P_s)$ y r datos desconocidos $(D_1, \ldots, D_r)$. Estos datos serán transmitidos a los procesadores cumpliendo las siguientes reglas:

1. Cada uno de los r datos debe transmitirse en alguna unidad de tiempo $(1, 2, \ldots)$ a todos los procesadores.

2. Ningún dato se puede transmitir en la misma unidad de tiempo a dos procesadores distintos.

3. En la misma unidad de tiempo no se pueden transmitir dos o más datos al mismo procesador.

4. Si en la unidad de tiempo T_1 se transmiten los datos D_a y D_b a los procesadores P_i y P_j respectivamente y en la unidad de tiempo T_2 (posterior a T_1) se transmite el dato D_b al procesador P_i entonces en esa misma unidad de tiempo se transmite el dato D_a al procesador P_j. (Esta regla se refiere a la adquisición justa de información.)

Es claro que la matriz con columnas $P_1, \ldots, P_s$, renglones $D_1, \ldots, D_r$ y colores $1, \ldots, n$ es una matriz intercalada de tipo (r, s, n). ¿Cuál es la mínima cantidad n de unidades de tiempo necesarias para que todos los procesadores reciban todos los datos?

Aplicación a diseño de experimentos

Suponga que se dispone de r laboratorios $(L_1, \ldots, L_r)$ y de s días $(1, \ldots, s)$ para llevar a cabo una serie de n experimentos $(E_1, \ldots, E_n)$. Las condiciones de experimentación exigen lo siguiente:

1. Cada laboratorio realiza s experimentos distintos, uno cada día.

2. El mismo día no se puede realizar el mismo experimento en dos o más laboratorios distintos.

3. Si el laboratorio L_A realiza el experimento E_a el mismo día que el laboratorio L_B realiza el experimento E_b y, otro día, el laboratorio L_A realiza el experimento E_b, entonces el laboratorio L_B debe realizar el mismo día el experimento E_a.

Se puede ver que la matriz con renglones $L_1, \ldots, L_r$, columnas $1, \ldots, s$ y colores $E_1, \ldots, E_n$ es una matriz intercalada de tipo (r, s, n). ¿Será posible llevar a cabo los n experimentos sujetos a las condiciones descritas?

Aplicación a comunicación de computadoras

Considere una red de r computadoras $(C_1, \ldots, C_r)$ conectadas de modo que cualquiera de ellas puede transmitir mensajes a todas las demás (en *broadcast*, es decir, todo mensaje transmitido lo reciben todas las computadoras). El mecanismo de comunicación es tal que:

1. Toda computadora debe transmitir un mensaje en cada una de s unidades de tiempo $(1, \ldots, s)$.

2. Todos los mensajes transmitidos en la misma unidad de tiempo son distintos.

3. Ninguna computadora transmite el mismo mensaje dos o más veces.

Cada computadora puede decidir entre transmitir un mensaje nuevo o retransmitir un mensaje que haya recibido previamente. En el segundo caso, el sistema está configurado de modo que ocurra lo siguiente: suponga que en la unidad de tiempo t_2 la computadora B está retransmitiendo el mensaje a, el cual fué transmitido (o retransmitido) previamente por la computadora A en la unidad de tiempo t_1 (con $t_1 < t_2$) entonces, la computadora A está obligada a retransmitir en la unidad de tiempo t_2 el mensaje que fué transmitido por B en el instante t_1.

En el sistema descrito, ¿cuál es el número mínimo n de mensajes distintos $(M_1, \ldots, M_n)$ que podemos garantizar se transmitirán en las s unidades de tiempo?

Se puede ver que la matriz con renglones $C_1, \ldots, C_r$, columnas $1, \ldots, s$ y colores $M_1, \ldots, M_n$ es una matriz intercalada de tipo (r, s, n).

2 Conjetura de Yuzvinsky (caso diádico)

En esta sección presentamos dos pruebas de la conjetura de Yuzvinsky para el caso donde las matrices intercaladas son submatrices de la tabla de Cayley del grupo diádico.

La primera prueba fué dada por Yuzvinsky [Yuz]. La prueba es complicada y en la versión publicada no están demostrados algunos detalles. En esta sección damos pruebas elementales para todos ellos.

La segunda prueba se debe a Eliahou y Kervaire [EK2]. Esta prueba tiene un enfoque distinto y hace uso de las propiedades multiplicativas del campo F_q con $q = 2^m$ en lugar de las aditivas del grupo $\mathcal{D}$.

2.1 Prueba de Yuzvinsky

La prueba de la conjetura de Yuzvinsky está basada principalmente en los lemas 2.10 a 2.12. Para demostrar estos últimos se requieren algunos resultados intermedios (lemas 2.2, 2.3, 2.4, 2.8 y 2.9) para los que se dan pruebas elementales. Para facilitar la lectura, se han incluido las demostraciones de algunos resultados sencillos (lemas 2.1, 2.5, 2.6 y 2.7).

Definición 2.1 *Sean A, B, C conjuntos finitos y $\varphi : A \times B \to C$. La función φ satisface la condición de intercalación si:*

1. *para toda $a \in A$ la función $\varphi\mid_{a\times B}$ es inyectiva,*
2. *para toda $b \in B$ la función $\varphi\mid_{A\times b}$ es inyectiva,*
3. $\varphi(a, b) = \varphi(c, d) \Rightarrow \varphi(a, d) = \varphi(c, b)$.

Definición 2.2 *Denotaremos por $\mathcal{D}$ al* grupo diádico, *es decir, al grupo abeliano libre con un conjunto numerable de generadores de orden dos. Denotaremos por $\oplus$ a la operación de este grupo.*

Consideraremos que los elementos de $\mathcal{D}$ son los enteros no negativos (naturales) y que $a \oplus b$ es la suma diádica, es decir, el natural que se obtiene al sumar mod 2 las componentes de las representaciones binarias de a y b.

Los siguientes lemas son elementales:

Lema 2.1 *Sean A, B, C subconjuntos finitos de $\mathcal{D}$ tales que $A \oplus B \subset C$. Entonces la función $\varphi : A \times B \to C$ definida por la fórmula $\varphi(a, b) = a \oplus b$ con $a \in A$, $b \in B$ satisface la condición de intercalación.*

Demostración. Sean $a, b, c, d \in \mathcal{D}$, entonces:

1. $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a \oplus c & \Rightarrow \\ a \oplus (a \oplus b) &= a \oplus (a \oplus c) & \Rightarrow \\ (a \oplus a) \oplus b &= (a \oplus a) \oplus c & \Rightarrow \\ 0 \oplus b &= 0 \oplus c & \Rightarrow \\ b &= c. \end{aligned}$$

2. $a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c$ se prueba de manera similar.

3. $a \oplus b = c \oplus d \Rightarrow a \oplus d = c \oplus b$

$$\begin{aligned} a \oplus b &= c \oplus d & \Rightarrow \\ (a \oplus b) \oplus (b \oplus d) &= (c \oplus d) \oplus (d \oplus b) & \Rightarrow \\ (a \oplus (b \oplus b)) \oplus d &= (c \oplus (d \oplus d)) \oplus b & \Rightarrow \\ (a \oplus 0) \oplus d &= (c \oplus 0) \oplus b & \Rightarrow \\ a \oplus d &= c \oplus b. \end{aligned}$$

□

Definición 2.3 *La tripleta (m, n, p) de enteros no negativos se dice* pura *si $mn = 0$ o si $m, n \leq p$ y se cumple la condición*

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

para $p - m < k < n$.

Lema 2.2 *Si (m, n, p) es pura entonces (n, m, p) es pura.*

Demostración. Basta ver el caso $mn \neq 0$. (m, n, p) es pura si y sólo si $m, n \leq p$ y

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

para $p - m < k < n$ si y sólo si $m, n \leq p$ y

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

para $p - n < p - k < m$ si y sólo si $m, n \leq p$ y (haciendo $j = p - k$)

$$\binom{p}{j} = \binom{p}{p-k} = \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

para $p - n < j < m$ si y sólo si (n, m, p) es pura. □

Lema 2.3 *Si (m, n, p) es pura y $u \leq m, v \leq n, w \geq p$ entonces (u, v, w) es pura.*

Demostración. Haremos la prueba en dos partes. primero probaremos que con las condiciones del lema (u, v, p) es pura y luego que (u, v, w) es pura. Para la primer parte basta ver que si $p - u < k < v$ entonces $p - m < k < n$ por lo que

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

así que (u, v, p) es pura. Para la segunda parte basta probar que si (m, n, p) es pura entonces $(m, n, p+1)$ es pura y el resultado se sigue por inducción en p. En efecto, tomemos k tal que $(p+1) - m < k < n$ entonces claramente se cumple que $p - m < k < n$ y $p - m < k - 1 < n$ por lo que

$$\binom{p+1}{k} \equiv \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$$

y entonces $(m, n, p+1)$ también es pura. □

Lema 2.4 *(m, n, p) es pura si y sólo si $(2m, 2n, 2p)$ es pura.*

Demostración. Consideremos las identidades

$$\binom{2p}{2j+1} = 2\sum_{i=0}^{j} \binom{p}{i}\binom{p}{j-i}$$

y

$$\binom{2p}{2j} = 2\sum_{i=0}^{j-1}\binom{p}{i}\binom{p}{j-i} + \binom{p}{j}^2.$$

($\Rightarrow$) Sea k tal que $2p-2m < k < 2n$. Es claro que si k es impar entonces $\binom{2p}{k}$ es par, además, cuando k es par entonces se cumple que

$$\binom{2p}{k} \equiv \binom{p}{k/2}^2 \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$$

ya que (m, n, p) es pura y $p-m < k/2 < n$, por lo tanto $(2m, 2n, 2p)$ es pura.

($\Leftarrow$) Sea k tal que $p-m < k < n$. Notemos ahora que

$$\binom{p}{k}^2 \equiv \binom{2p}{2k} \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$$

ya que $2p-2m < 2k < 2n$. Esto implica que

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

y por lo tanto (m, n, p) es pura □

Definición 2.4 *Sea n un natural. Denotaremos con $l(n)$ al entero t tal que $2^t \leq n < 2^{t+1}$. Para toda $t \geq l(n)$ denotaremos por $n_t n_{t-1} \ldots n_1 n_0$ a la expansión binaria de n, es decir:*

$$n = \sum_{i=0}^{t} n_i 2^i$$

con $n_i \in \{0, 1\}$ para $0 \leq i \leq t$. Si m, n son naturales entonces diremos para toda $i \geq 0$ que m_i y n_i son bits comunes *de m y n.*

Definición 2.5 *Diremos que los naturales m y n son* complementarios *si no tienen bits comunes iguales a 1 (es decir, si $m_i = 1 \Rightarrow n_i = 0$ o, equivalentemente, si $m+n = m \oplus n$), si además existe un natural t tal que $m+n = 2^t - 1$ diremos que m y n son* suplementarios*. Diremos que m es una* suma parcial *de n si m y $n-m$ son complementarios (es decir, si $m_i = 1 \Rightarrow n_i = 1$), denotaremos esto por $m \lhd n$.*

Definición 2.6 *Para todo natural* $n < 2^{t+1}$ *el* peso $\|n\|$ *de* n *está dado por*

$$\|n\| = \sum_{i=0}^{t} n_i.$$

Lema 2.5 *Para cualesquiera naturales* a *y* b *se cumple la desigualdad*

$$\|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$$

con igualdad si y sólo si a *y* b *son complementarios.*

Demostración. Sea $c = a + b$. Lo que se desea probar es que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i \geq \sum_{i=0}^{n+1} c_i.$$

Hagamos la prueba por inducción en n. Para $n = 0$ es cierto. lo que se puede ver de la siguiente tabla:

a_0	b_0	c_1	c_0	$a_0 + b_0$	$c_1 + c_0$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	2	1

Ahora supongamos que para $n \leq k$ se cumple la desigualdad. Entonces, para $n = k + 1$ tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_i + \sum_{i=0}^{k+1} b_i \geq a_{k+1} + b_{k+1} + c' + \sum_{i=0}^{k} c_i \geq c_{k+2} + c_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} c_i = \sum_{i=0}^{k+2} c_i$$

donde c' es el acarreo de la suma de los primeros k bits de a y b y la segunda desigualdad se puede ver que es cierta de la siguiente tabla:

a_{k+1}	b_{k+1}	c'	c_{k+2}	c_{k+1}	$a_{k+1} + b_{k+1} + c'$	$c_{k+2} + c_{k+1}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	2	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	2	1
1	1	0	1	0	2	1
1	1	1	1	1	3	2

Entonces la desigualdad es cierta también para $n = k + 1$. De la prueba es fácil ver que la igualdad se cumple si y sólo si a y b son complementarios. $\square$

Lema 2.6 *El máximo entero k tal que $2^k|m!$ está dado por*

$$k = \sum_{i=1}^{l(m)} \left[\frac{m}{2^i}\right] = m - \|m\|.$$

Demostración. La cantidad de números $\leq m$ y divisibles por 2 es $[m/2]$, por 4 es $[m/4]$, ..., por 2^i es $[m/2^i]$, etc. Ahora, supongamos que $1 \leq j \leq m$ es divisible por 2^i entonces j es uno de los números divisibles por $2, 4, \dots, 2^i$ por lo que j se contó exactamente i veces en la suma anterior, por lo tanto, esa suma coincide con el entero k. Sea $n = l(m)$, entonces:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{m}{2^i}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} m_{i+j}2^j \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} m_i 2^j = \sum_{i=0}^{n} m_i(2^i - 1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} m_i 2^i - \sum_{i=0}^{n} m_i = m - \|m\|. \end{aligned}$$

Como k depende de m, la denotaremos por $k(m)$. $\square$

Lema 2.7 *Sean $r \leq s$, entonces*

$$\binom{s}{r} \equiv 1 \pmod 2$$

si y sólo si r es suma parcial de s.

Demostración. Hagamos $s = r + t$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \tbinom{s}{r} \equiv 1 \pmod 2 &\Leftrightarrow k(s) = k(r) + k(s-r) \\ &\Leftrightarrow k(r+t) = k(r) + k(t) \\ &\Leftrightarrow r + t - \|r+t\| = r - \|r\| + t - \|t\| \\ &\Leftrightarrow \|r+t\| = \|r\| + \|t\| \end{aligned}$$

igualdad que se cumple si y sólo si r y t son complementarios si y sólo si r es suma parcial de s. $\square$

Lema 2.8 *Si (m,n,p) es pura y t es un entero positivo tal que $m,n,p \leq 2^t$ entonces $(m, 2^t - p, 2^t - n)$ es pura.*

Demostración. Sean $s = 2^t - n$ y $z = n - 1$. Supongamos por el contrario que $p < 2^t$ y que existe un entero r tal que $p - n < r < m$ y

$$\binom{s}{r} \equiv 1 \pmod 2.$$

Por el lema anterior, esto quiere decir que $s_i = 0 \Rightarrow r_i = 0$. Ahora notemos que s y z son suplementarios y por lo tanto $z_i = 1 \Leftrightarrow s_i = 0$ de donde $z_i = 1 \Rightarrow r_i = 0$. Ahora considere al natural $w = z + r$, es claro que r es suma parcial de w de donde

$$\binom{w}{r} \equiv 1 \pmod 2$$

pero por el lema 2.3 esto implica que $r + n - 1 = w < p$ y entonces $r \leq p - n$ lo cual es una contradicción. □

Lema 2.9 *Si (m,n,p) y (m,u,v) son puras entonces $(m, n+u, p+v)$ es pura.*

Demostración. Considere la identidad

$$\binom{p+q}{k} = \binom{p}{0}\binom{q}{k} + \binom{p}{1}\binom{q}{k-1} + \cdots + \binom{p}{k}\binom{q}{0}.$$

Sabemos que para toda k tal que $p - n < k < m$ se cumple que

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

y que para toda k tal que $v - u < k < m$ se cumple que

$$\binom{q}{k} \equiv 0 \pmod 2$$

entonces los primeros $k - v + u$ y los últimos $k - p + n$ términos de la anterior suma son pares y como en la suma hay $k + 1$ términos, ésta será par si $(k - v + u) + (k - p + n) \geq k + 1$, o sea cuando $(p + v) - (n + u) < k < m$ que equivale a decir que $(m, n + u, p + v)$ es pura. □

Lema 2.10 *Si (m, n, p) es pura y k, t son enteros positivos tales que $2^{t-1} < m \leq 2^t$, $n = k2^t + u$ y $p = k2^t + v$ donde $0 \leq u, v < 2^t$ entonces (m, u, v) es pura.*

Demostración. Es suficiente considerar el caso cuando $u > 0$. Primero probemos que $m \leq v$. Si $m > v$, ya que v es una suma parcial de p y $v > p - n = v - u$, entonces tendríamos una contradicción a que (m, n, p) sea pura. Supongamos ahora que existe un entero x tal que $v - u = p - n < x < m$ y $\binom{v}{x} \equiv 1 \pmod 2$. De esto es claro que $\binom{p}{x} \equiv 1 \pmod 2$, sin embargo esto contradice otra vez que (m, n, p) sea pura. $\square$

Definición 2.7 *Sean n, r dos naturales tales que $r \leq l(n)$ entonces*

$$n(r) = \sum_{i=0}^{r-1} n_i 2^i,$$

$\bar{n}(r) = n - n(r)$. Si $s < r$ entonces $n(r, s) = \bar{n}(s) - \bar{n}(r)$. Finalmente, si $A \subset \{s, s+1, \ldots, r-1\}$ y para toda $i \in A$ se cumple que $n_i = 1$ entonces

$$n(r, s, \bar{A}) = \sum_{i \in \{s, \ldots, r-1\} \setminus A} n_i 2^i.$$

Definición 2.8 *Sean $0 < x < n$ dos naturales, entonces*

$$U(n, x) = \min\{y \in N | y > x, y \lhd n\}$$

y

$$D(n, x) = \max\{y \in N | y < x, y \lhd n\}.$$

Lema 2.11 *Sean a, b, c, d números naturales tales que $r \leq l(a)$, $a_r = 1$, $b \lhd a(r)$, $c + d < a(r) + b$. Entonces $U(a, c) + U(a, d) \leq 2^r + b$.*

Demostración. Por inducción en $||b||$. Supongamos que $||b|| = 0$, es decir $b = 0$ y $c + d < a(r)$. Sea s el mayor natural tal que $c(s) \geq a(s)$ y sean

$$\begin{aligned} \Delta &= \{i | s+1 \leq i < r, a_i = 1, c_i = 0\}, \\ \delta &= \{i | s \leq i < r, a_i = 1, c_i = 1\}. \end{aligned}$$

Entonces $U(a,c) = a(r, s+1, \bar{\Delta}) + 2^s, d < a(r) - c \leq a(r, s, \bar{\delta})$ y $U(a,d) \leq a(r, s, \bar{\delta})$. Por lo tanto

$$U(a,c) + U(a,d) \leq a(r, s+1, \bar{\Delta}) + 2^s + a(r, s, \bar{\delta}) = a(r,s) + 2^s \leq 2^r.$$

Ahora supongamos que $\|b\| > 0$ y que el lema es verdadero para todos los naturales con peso menor que $\|b\|$. Sean $C = U(a,c)$ y $D = U(a,d)$ y supongamos por el contrario que $C + D > 2^r + b$. Entonces tenemos tres casos:

1. C (o D) es igual a 2^r y por lo tanto $D > b$. Entonces $c \geq D(a,C) = a_r$, $d \geq D(a,D) \geq b$ de donde $c + d \geq a(r) + b$.

2. C (o D) es mayor a 2^r. Ya que $a_r = 1$ tenemos que $c \geq D(a,C) \geq 2^r$. Sean $c' = c - 2^r$ y $s = l(b)$ y notemos que $U(a,c') = C - 2^r$ y $U(a,c') + U(a,d) > 2^s + b(s)$. Como $\|b(s)\| < \|b\|$, por la hipótesis de inducción $c(1) + d \geq a(s) + b(s)$ y finalmente $c + d \geq 2^r + a(s) + b(s) = 2^r - 2^s + a(s) + b \geq a(r) + b$.

3. C y D son menores a 2^r. Sea $t = \max\{i | C_i = D_i = 1\}$. Ya que $C + D > 2^r$ se cumple que $\bar{C}(t) + \bar{D}(t) = 2^r$. Si $C(t)$ (o $D(t)) = 0$ entonces $c \geq D(a,C) = \bar{C}(t) - 2^t + a(t)$, $d \geq D(a,D) \geq \bar{D}(t) + b$ y $c + d \geq 2^r - 2^t + a(t) + b \geq a(r) + b$. Si $\bar{C}(t)\bar{D}(t) \neq 0$ entonces hagamos $c' = c - \bar{C}(t)$ y $d' = d - \bar{D}(t)$ y notemos que $U(a,c') = \bar{C}(t)$, $U(a,d') = \bar{D}(t)$ y $U(a,c') + U(a,d') > b = 2^s + b(s)$. Usando inducción obtenemos nuevamente que $c(1) + d(1) \geq a(s) + b(s)$. A partir de esto continuamos como en el caso anterior.

En los tres casos obtenemos una contradicción. □

Lema 2.12 *Si $(m,n,p), (u,v,p), (m,v,w), (u,n,w)$ son puras entonces $(m+u, n+v, p+w)$ es pura.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m \leq u$ y que $n \leq v$. Considere los siguientes casos:

1. $p \leq w$. Como (u,v,p) es pura, por el lema 2.4 tenemos que $(2u, 2v, 2p)$ es pura y por el lema 2.3 se tiene que $(m+u, n+v, p+w)$ es pura.

2. $m = u$. Sea $q = \min(p, w)$ entonces (m, v, q) es pura, por el lema 2.4 $(2m, 2v, 2q)$ es pura y por el lema 2.3 $(m + u, n + v, p + w)$ es pura.

3. $n = v$. Idéntico al caso anterior.

Entonces el único caso que falta probar es cuando $p > w$, $m < u$ y $n < v$. Sean $a = m + u$, $b = n + v$, $c = p + w$ y suponga que existe x tal que $c - b < x < a$ y $x \lhd c$. Veremos que esto nos lleva a una contradicción. Sean $l = l(x)$ y r, s dos naturales tales que $r \lhd p$, $s \lhd w$ y $r + s = x$. Separemos en dos casos:

1. $p(l) + w(l) < 2^l$. En este caso $\bar{p}(l) - \bar{w}(l) + p(l) - w(l) = p - w \leq p - v = (c - w) - (b - n) = (c - b) - (w - n) < c - b < x < 2^{l+1}$ de donde $\bar{p}(l) - \bar{w}(l) < 2^{l+1} - p(l) + w(l) < 2^{l+1} + p(l) + w(l) < 2^{l+1} + 2^l$, de donde $\bar{p}(l) - \bar{w}(l) = 2^l$ y $p - w = 2^l + p(l) - w(l)$.

   Supongamos primero que $p_l = r_l = 1$ y $w - n \geq w(l)$. En este caso $p - v = (c - b) - (w - n) < x - w(l) = r + s - w(l) \geq r$ y $w - v = (p - v) - (p - w) < (x - w(l)) - (2^l + p(l) - w(l)) = x - 2^l - p(l) = x(l) - p(l) = r(l) + s(l) - p(l) \geq s(l) = s$. Ya que $m + u > x = r + s$, entonces se debe cumplir alguna de $u > r$ ó $m > s$, contradiciendo la pureza de (u, v, p) ó (m, v, w), respectivamente.

   Ahora supongamos que $w_l = s_l = 1$ o que $w - n < w(l)$. Como $(w - v) + (w - n) = (c - b) - (p - w) < x - (p - w) = x(l) + w(l) - p(l) \geq w(l) + s(l)$ entonces se cumplen las condiciones del lema 2.11 para $(a, b, c, d, r) = (w, s(l), w - v, w - n, l)$. Usando ese lema y que (m, v, w) y (u, n, w) son puras llegamos a que $m + u \leq 2^l + s(l) \leq 2^l + x(l) = x$ contradiciendo la elección de x.

2. $p(l) + w(l) \geq 2^l$. En este caso $p_l = w_l$. Como $p(l) + w(l) > x$ y $p - w < x$ entonces $p(l) + w(l) > p - w = \bar{p}(l) + p(l) - \bar{w}(l) - w(l)$ de donde $\bar{p}(l) - \bar{w}(l) < 2w(l) \leq 2^{l+1}$. Esto implica que $\bar{p}(l) = \bar{w}(l)$ y que $p - w = p(l) - w(l)$. Sea $k = \max\{i \in N | i < l, p_i = w_i = 1\}$ y pongamos las condiciones adicionales $p(l, k) \lhd r$ y $w(l, k) \lhd s$ sobre r, s.

   Considere primero el caso $k < l - 1$, entonces $w(l) < 2^{l-1}$ y $u > x/2 \geq 2^{l-1} > w(l)$. Como (u, n, w) es pura se cumple que $w - n \geq w(l)$ y por lo tanto $w - v < x - w(l) \leq r$ y $w - n < x - p(l) \leq s$ y la prueba termina como en la primera parte del caso anterior.

Ahora suponga que $k = l - 1$. Si $m \leq 2^k$ entonces $u > x - 2^k \geq \max\{r, s\}$ y ya que es cierta alguna de $p - v < r$ ó $w - n < s$, esto contradice la pureza de (u, v, p) ó (u, n, w), respectivamente. Por lo tanto $m > 2^k$ y como (m, v, w) es pura se cumple que $w - n \geq 2^k$.

Hagamos inducción en $\|x\|$. Si $\|x\| = 1$ (es decir, si $x = 2^l$) entonces $(p - v) + (w - n) < 2^l$, $w - v < 2^k$ y tenemos una contradicción. Ahora suponga que $\|x\| > 1$ y que el enunciado es verdadero para todos los números de peso menor. Sean $m' = m - 2^k, p' = p - 2^k, u' = u - 2^k, w' = w - 2^k, x' = x - 2^l$. Es fácil verificar que (m', n, p'), (u', v, p'), (m', v, w') y (u', n, w') son puras. Por otro lado $x' \lhd c' = p' + w'$, $c' - b < x' < a' = m' + u'$ y $\|x'\| < \|x\|$. Por la hipótesis de inducción tenemos una contradicción.

Esto termina la prueba. $\square$

En este momento estamos listos para demostrar la conjetura de Yuzvinsky en el caso diádico.

Teorema 2.1 *Las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

1. (m, n, p) *es pura,*
2. *existen subconjuntos finitos* $A, B, C \subset \mathcal{D}$ *de cardinalidades* m, n, p *tales que* $A \oplus B \subset C$.

Demostración.

($\Leftarrow$) Por inducción en p. Para $p = 1$ el enunciado es obvio. Supongamos que el enunciado es verdadero para todas las ternas (m', n', p') con $p' < p$ y sean $A, B, C \subset \mathcal{D}$ tales que $A \oplus B \subset C$. Podemos suponer que $0 \in A, B, C$. Denotemos por $\{d_1, d_2, \ldots\}$ al conjunto de generadores de $\mathcal{D}$ y por $\mathcal{D}_k$ al subgrupo de $\mathcal{D}$ generado por $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$. Finalmente, sea $q = \min\{k | A, B, C \subset \mathcal{D}_k\}$. Ahora sean

$$\begin{array}{ccccc} A_1 = A \cap \mathcal{D}_{q-1} & , & B_1 = B \cap \mathcal{D}_{q-1} & , & C_1 = C \cap \mathcal{D}_{q-1} \\ A_2 = A \setminus A_1 & , & B_2 = B \setminus B_1 & , & C_2 = C \setminus C_1 \end{array}$$

y denotemos a las cardinalidades de A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$ por m_i, n_i, p_i, respectivamente. Como $\mathcal{D}_{q-1}$ es un subgrupo de índice 2 en $\mathcal{D}_q$ tenemos que

$$\begin{array}{ccc} A_1 \oplus B_1 \subset C_1 & , & A_2 \oplus B_2 \subset C_1 \\ A_1 \oplus B_2 \subset C_2 & , & A_2 \oplus B_1 \subset C_2 \end{array}$$

Como $0 \in C$ y $p_1, p_2 < p$, por la hipótesis de inducción sabemos que $(m_1, n_1, p_1), (m_2, n_2, p_1), (m_1, n_2, p_2), (m_2, n_1, p_2)$ son puras. Por el lema 2.12 también (m, n, p) es pura.

($\Rightarrow$) Por inducción en m. Si $m = 1$ el enunciado es obvio. Supongamos que $m > 1$ y que para toda (m', n', p') con $m' < m$ (con $m', n', p' \leq 2^s$) existen conjuntos A', B', C' de cardinalidades m', n', p' en $\mathcal{D}$ tales que $A' \oplus B' \subset C'$. Sea (m, n, p) pura y t el entero tal que $2^{t-1} < m \leq 2^t$.

1. Supongamos que $n, p < 2^t$ y sean $a = 2^t - p, b = m, c = 2^t - n$. Por el lema 2.8 se tiene que (a, b, c) es pura y como $a \leq 2^{t-1} < m$ existen subconjuntos A'', B'', C'' de cardinalidades a, b, c en $\mathcal{D}_t$ tales que $A'' \oplus B'' \subset C''$. Entonces, los conjuntos $A = B'', B = \mathcal{D}_t \setminus C'', C = \mathcal{D}_t \setminus A''$ satisfacen el enunciado y están en $\mathcal{D}_t$.

2. Ahora suponga que existen enteros no negativos k, l tales que $n = k2^t + n', p = l2^t + p'$ con $0 \leq n', p' < 2^t$. Suponga que $l > k$ y sean A, B' subconjuntos de $\mathcal{D}_t$ de cardinalidades m, n' y $a_1, \ldots, a_{k+1}$ elementos de $\mathcal{D}_s$ donde $2^{s-1} < k + 1 \leq 2^s$. Representemos $\mathcal{D}_{t+s}$ como la suma directa $\mathcal{D}_t \oplus \mathcal{D}_s$ y pongamos

$$B = (B' \oplus a_{k+1}) \bigcup_{i=1}^{k} (\mathcal{D}_t \oplus a_i)$$

   La cardinalidad de B es n. Identificando a $\mathcal{D}_t$ con el subgrupo $\mathcal{D}_t \oplus 0$ de $\mathcal{D}_{t+s}$ obtenemos el conjunto $C' = A \oplus B$ de tamaño menor a $(k+1)2^t$ en $\mathcal{D}_{t+s}$. Si u es el entero tal que $2^{u-1} < l+1 \leq 2^u$ si $p' > 0$ y $2^{u-1} < l \leq 2^u$ si $p' = 0$ y C es un conjunto de cardinalidad p tal que $C' \subset C \subset \mathcal{D}_{t+u}$ entonces obtenemos los conjuntos A, B, C que necesitabamos.

3. Finalmente, sea $l = k$. Por el lema 2.11 se sabe que (m, n', p') es pura y, como se probó en el primer caso, existen conjuntos A, B', C' de cardinalidades m, n', p' en $\mathcal{D}_t$ tales que $A \oplus B' \subset C'$. La prueba continua como en el caso anterior. □

2.2 Prueba de Eliahou y Kervaire

Sea F un campo y f un polinomio no nulo de una variable con coeficientes en F. El siguiente hecho es bien conocido:

Lema 2.13 *Si $A \subset F$, $|A| = r$ y $f(a) = 0$ para toda $a \in A$, entonces grado$(f) \geq r$.*

En 1992 N. Alon y M. Tarsi generalizaron este resultado [AT], y posteriormente S. Eliahou y M. Kervaire [EK1] hicieron reformulaciones equivalentes de la generalización. La forma dada por Eliahou y Kervaire es:

Teorema 2.2 *Sean f un polinomio en el anillo $F[x_1, \ldots, x_n]$ y $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de F tales que $|A_1| = r_1, \ldots, |A_n| = r_n$ y $f(A_1 \times \cdots \times A_n) = 0$, entonces top$(f)$ está en el ideal $(x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n})$, donde top$(f)$ es la componente homogenea de f de grado máximo.*

Demostración. Por inducción en n. Para $n = 1$ se reduce al teorema anterior. Sea $n > 1$ y suponga que el resultado es cierto para $n - 1$. Sea $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$. Podemos clasificar los monomios de top(f) en dos grupos:

- $u_1, \ldots, u_k \notin (x_n^{r_n})$, y
- $v_1, \ldots, v_l \in (x_n^{r_n}) \subset (x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n})$.

Como los segundos ya están en $(x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n})$, basta ver que $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset (x_1^{r_1}, \ldots, x_{n-1}^{r_{n-1}})$, para lo cual podemos suponer que $l = 0$. Consideremos

$$g(x_n) = \prod_{a \in A_n} (x_n - a) = x_n^{r_n} - h(x_n)$$

donde grado$(h) < r_n$, entonces podemos reemplazar cada aparición en f de $x_n^{r_n}$ con $h(x_n)$ y esto no afecta el hecho de que $f(A_1 \times \cdots \times A_n) = 0$. Ahora, el nuevo top$(f) = \{u_1, \ldots, u_k\} \notin (x_n^{r_n})$.

Ahora escribamos f como un polinomio en x_n

$$f = f_0 + f_1 x_n + \cdots + f_d x_n^d$$

con $d < r_n$.

Sea $a \in A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ y escribamos

$$f_a(x_n) = f_0(a) + f_1(a)x_n + \cdots + f_d(a)x_n^d \in F[x_n].$$

Es claro que $f_a(A_n) = 0$ de donde $f_a(x_n)$ es idénticamente cero, pues tiene al menos r_n raíces. Entonces, $f_i(a) = 0$ para $1 \leq i \leq d$ de donde $f_i(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) = 0$ y finalmente $\text{top}(f_i) \in (x_1^{r_1}, \ldots, x_{n-1}^{r_{n-1}})$ para toda i. Entonces

$$\text{top}(f) = \text{top}(\text{top}(f_0) + \text{top}(f_1)x_n + \cdots + \text{top}(f_d)x_n^d) \in (x_1^{r_1}, \ldots, x_{n-1}^{r_{n-1}}).$$

(Este teorema es conocido como el lema de Alon-Tarsi.) $\square$

Ahora podemos dar una segunda prueba de la Conjetura de Yuzvinsky en el caso diádico. Recordemos que la función de Pfister $r \circ s$ está definida como el mínimo natural n tal que $(x+y)^n$ está en el ideal generado por (x^r, y^s) en el anillo de polinomios $F_2[x, y]$.

El siguiente teorema se demuestra en [EK2]:

Teorema 2.3 *Sea V un espacio vectorial sobre F_2. Sean $A, B \subset V$ subconjuntos de cardinalidades r, s respectivamente. Entonces $|A \oplus B| \geq r \circ s$.*

Demostración. Podemos suponer que V es el campo F_q con $q = 2^m$ para algún entero positivo m. Sea $C = A \oplus B$. Sea

$$f(x, y) = \prod_{c \in C}(x + y - c)$$

en el anillo de polinomios $F_q[x, y]$ (recordemos que $+$ y $-$ coinciden con $\oplus$). Evidentemente, $f(A \times B) = 0$.

Notemos que $top(f) = (x+y)^{|C|}$. Por el lema de Alon-Tarsi, esto implica que $(x+y)^{|C|} \in (x^r, y^s)$ en $F_q[x, y]$. Entonces también se cumple que $(x+y)^{|C|} \in (x^r, y^s)$ en $F_2[x, y]$, ya que todos los coeficientes de $(x+y)^{|C|}$ están en F_2. Por lo tanto, $|C| \geq r \circ s$, por la definición de $r \circ s$. $\square$

3 Matrices intercaladas y variedades

Sea F un campo finito. Un conjunto es una *variedad algebraica* en F^n si es el conjunto de ceros de algún polinomio en el anillo $F[x_1, \ldots, x_n]$. Mostraremos que el conjunto de las matrices no intercaladas de tipo (r, s, n) es una variedad algebraica exhibiendo un polinomio $\mathcal{P}_{rs}$ tal que $\mathcal{P}_{rs}(A) = 0$ si y sólo si A no es intercalada.

Sea x_{ij} una variable correspondiente a la coordenada (i, j) de la matriz A de orden $r \times s$. Sea $q = p^m$ una potencia de un primo p $(q \geq rs)$ y considere los siguientes polinomios en F_q, el campo con q elementos.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_i(X) &= \prod_{1 \leq j < k \leq s} (x_{ij} - x_{ik}) \\
\mathcal{C}_j(X) &= \prod_{1 \leq i < k \leq r} (x_{ij} - x_{kj}) \\
\mathcal{Q}^{ij}_{kl}(X) &= H(x_{ij} - x_{kl})H(x_{il} - x_{kj}) + (x_{ij} - x_{kl})(x_{il} - x_{kj})
\end{aligned}$$

donde $H(x) = 1 - x^{\phi(q)}$.

El teorema de Euler asegura que $H(x - y) = 1$ si y sólo si $x = y$. Es decir, $\delta(x, y) = H(x - y)$ es la función característica sobre F_q.

Ahora considere el polinomio

$$\mathcal{P}_{rs}(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{R}_i \prod_{j=1}^{s} \mathcal{C}_j \prod_{1 \leq j < l \leq s}^{1 \leq i < k \leq r} \mathcal{Q}^{ij}_{kl}$$

Teorema 3.1 *Sea A una matriz de orden $r \times s$ con colores en F_q, entonces $\mathcal{P}_{rs}(A) = 0$ si y sólo si A no es intercalada.*

Demostración. Suponga que en A se cumple que $a_{ij} = a_{ik}$ para algunas i, j, k entonces $\mathcal{R}_i(A) = 0$ y por lo tanto $\mathcal{P}_{rs}(A) = 0$. Suponga que en A se cumple que $a_{ij} = a_{kj}$ para algunas i, j, k entonces $\mathcal{C}_j(A) = 0$ y por lo tanto $\mathcal{P}_{rs}(A) = 0$. La última forma en que A puede ser no intercalada es cuando la submatriz 2×2 formada con las columnas i, k y los renglones j, l tenga 3 colores como sigue:

$$\begin{array}{c|cc}
 & i & k \\
\hline
j & a & b \\
l & c & a
\end{array}$$

(los otros casos quedan cubiertos por los dos anteriores). Entonces $\mathcal{Q}_{kl}^{ij}(A) = H(a-a)H(c-b) + (a-a)(c-b) = 0$ y por lo tanto $\mathcal{P}_{rs}(A) = 0$.

Si A fuera intercalada entonces $\mathcal{R}_i(A) \neq 0$, $\mathcal{C}_j(A) \neq 0$ para toda i, j. Además, toda submatriz 2×2 tiene alguna de las formas:

$$\begin{array}{c|cc} & i & k \\ \hline j & a & b \\ l & c & d \end{array}$$

o

$$\begin{array}{c|cc} & i & k \\ \hline j & a & b \\ l & b & a \end{array}$$

En el primero de los casos tenemos:

$$\mathcal{Q}_{kl}^{ij}(A) = H(a-d)H(c-b) + (a-d)(c-b) = (a-d)(c-b) \neq 0$$

y en el segundo caso:

$$\mathcal{Q}_{kl}^{ij}(A) = H(a-a)H(b-b) + (a-a)(b-b) = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto $\mathcal{P}_{rs}(A) \neq 0$. $\square$

Note que el grado de $\mathcal{P}_{rs}(A)$ es

$$\frac{1}{2}rs(r+s-2+(q-1)(r-1)(s-1)) \sim \frac{1}{2}r^3s^3.$$

El siguiente lema es una observación propuesta en [Sar]. Lo usaremos para disminuir el grado de $\mathcal{P}_{rs}$.

Lema 3.1 *Para toda u, v se cumple que $H(u)H(v) + uv = 0$ si y sólo si $H(u) + H(v) = 1$.*

Demostración. Recordemos que $H(0) = 1$ y que $H(x) = 0$ para $x \neq 0$.

($\Leftarrow$) Sin pérdida de generalidad, $H(u) = 1$ y $H(v) = 0$ de donde $u = 0$ y $H(u)H(v) + uv = 1 \cdot 0 + 0 \cdot v = 0$.

($\Rightarrow$) Si acaso $H(u) = H(v) = 1$ entonces $u = v = 0$ y

$$H(u)H(v) + uv = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

que es imposible. Por lo tanto alguna de ellas, digamos $H(u)$, es igual a 0. De aquí $uv = 0$, $v = 0$ y $H(v) = 1$. Finalmente $H(u) + H(v) = 0 + 1 = 1$. □

Sea

$$\mathcal{O}_{kl}^{ij}(X) = H(x_{ij} - x_{kl}) + H(x_{il} - x_{kj}) - 1$$

entonces es claro que $\mathcal{O}_{kl}^{ij}(X) = 0$ si y sólo si $\mathcal{Q}_{kl}^{ij}(X) = 0$.

Lema 3.2 *La submatriz 2×2 de la matriz pseudolatina A formada por las columnas i, k y los renglones j, l tiene una cantidad de colores distintos determinada por el valor de $\mathcal{O}_{kl}^{ij}(A)$ de la siguiente manera:*

$\mathcal{O}_{kl}^{ij}(A)$	*colores*
1	*2*
0	*3*
-1	*4*

Demostración. Sean $h = \mathcal{O}_{kl}^{ij}(A)$ y a, b, c, d los colores de la submatriz mencionada.

- Si a, b, c, d son todas distintas entonces $h = H(a - c) + H(b - d) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$.
- Si $a = c$ y $b = d$ entonces $h = H(a - a) + H(b - b) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$.
- Finalmente, si $a = c$ pero $b \neq d$ tenemos que $h = H(a - a) + H(b - d) - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$. □

Ahora considere el polinomio

$$\mathcal{N}_{rs}(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{R}_i \prod_{j=1}^{s} \mathcal{C}_j \prod_{1 \leq j < l \leq s}^{1 \leq i < k \leq r} \mathcal{O}_{kl}^{ij}$$

Teorema 3.2 *Sea A una matriz de orden $r \times s$ con colores en F_q, entonces $\mathcal{N}_{rs}(A) = 0$ si y sólo si A no es intercalada. Es más, $\prod_{1 \leq j < l \leq s}^{1 \leq i < k \leq r} \mathcal{O}_{kl}^{ij}$ es $(-1)^t$ si A es intercalada y tiene t submatrices 2×2 con cuatro colores.*

Demostración. Inmediata de los lemas anteriores. □

Note que el grado de $\mathcal{N}_{rs}$ es

$$\frac{1}{4}rs(2r + 2s - 4 + (q-1)(r-1)(s-1)) \sim \frac{1}{4}r^3s^3.$$

Ahora podemos reformular la conjetura de Yuzvinsky. Sea

$$B^{rs} = \underbrace{B \times \cdots \times B}_{rs \text{ veces}}$$

Conjetura 3.1 *Sea F_q un campo finito de cardinalidad $q \geq r \circ s - 1$ y sea $B \subseteq F_q$ tal que $|B| = r \circ s - 1$, entonces $\mathcal{N}_{rs}(X) = 0$ para toda $X \in B^{rs}$.*

En particular, si la cardinalidad del campo es $q = r \circ s - 1$, entonces $B = F_q$ y $\mathcal{N}_{rs}(X)$ es idénticamente cero.

4 Matrices intercaladas diádicas y no diádicas

Recordemos que una matriz intercalada es diádica si y sólo si es una submatriz de la tabla de Cayley del grupo diádico. En esta sección mostraremos algunas condiciones que nos garantizan que una matriz intercalada de tipo (r, s, n) es diádica.

Posteriormente mostraremos algunas propiedades de las matrices intercaladas no diádicas de orden $4 \times s$.

4.1 Matrices intercaladas diádicas

El siguiente resultado se puede encontrar en [Yiu1]:

Lema 4.1 *Sea A una matriz intercalada de tipo (n, n, n) entonces n es una potencia de 2.*

Demostración. Sean P, Q dos matrices intercaladas de tipos (a, b, c) y (u, v, w). Considere la matriz $M = P \otimes Q$ definida por $M_{ij} = (P_{i'j'}, Q_{i''j''})$ donde $i = i'u + i'', j = j'v + j''$ y $0 \leq i'' < u, 0 \leq j'' < v$. Es fácil ver que M es intercalada y se le llama el *producto tensorial* de P y Q.

Recordemos que $\mathcal{D}_1$ es la única matriz intercalada de tipo $(2, 2, 2)$, es más, $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_1$ (k veces) son matrices intercaladas de tipo $(2^k, 2^k, 2^k)$. Veamos que son las únicas de ese tipo.

En una matriz intercalada de tipo (r, s, n) llamaremos a un color *completo* si aparece $\min(r, s)$ veces. Si $r = s$ entonces ese color aparece en todos los renglones y columnas (*diagonalmente completo*). Además, por la propiedad de intercalación, la matriz es simétrica. No es difícil ver que si una matriz M de tipo (r, r, n) tiene dos colores diagonalmente completos entonces M es equivalente al producto tensorial $M' \otimes \mathcal{D}_1$ donde M' es de tipo $(r', r', n'), r = 2r', n = 2n'$. Si tenemos una matriz M de tipo (n, n, n) todos sus colores son diagonalmente completos. Aplicando repetidamente la observación anterior concluímos que $n = 2^k$ para alguna $k \geq 0$. $\square$

A continuación demostraremos algunos resultados similares:

Lema 4.2 *Sea A una matriz intercalada de tipo $(n-1, n, n)$ entonces n es una potencia de 2.*

Demostración. La frecuencia promedio de aparición de los n colores es $f = n(n-1)/n = n-1$. Si algún color apareciera menos de $n-1$ veces. entonces algún otro deberá aparecer al menos n veces (principio de casillas) que es imposible pues sólo hay $n-1$ renglones. Entonces todos los colores aparecen exactamente $n-1$ veces y cada uno de ellos no aparece en alguna columna. Agregue un renglón a A y en cada coordenada de ese renglón ponga el color que no aparece en cada columna. Esta nueva matriz B es de tipo (n, n, n). Suponga que B no es intercalada. entonces considere las dos columnas X y Y donde se viola la intercalación. Sean x y y los colores que aparecen en el último renglón de B en las columnas X y Y respectivamente. Ahora x aparece en la columna Y de A y y aparece en la columna X de A pero no aparecen en el mismo renglón. Sea c el color que está en la columna X en el mismo renglón que x en la columna Y. Como $c \neq y$ entonces c está en la columna Y de A y por lo tanto debe formar intercalación con x (pues A es intercalada) pero esto es imposible pues sabemos que x no está en X. Por lo tanto B es intercalada y por el lema 4.1 $n = 2^t$ para algún t. □

Lema 4.3 *Sea A una matriz intercalada de tipo $(n-1, n-1, n)$ entonces n es una potencia de 2.*

Demostración. La frecuencia promedio de aparición de los n colores es $f = (n-1)^2/n > n-2$. por lo tanto existe al menos un color a con frecuencia $n-1$, el cual podemos suponer que se encuentra en la diagonal principal de A. Como hay n colores. en cada renglón falta exactamente un color y ese color no es a. Sea B la matriz que se obtiene de A al aumentarle una columna y colocar en cada coordenada de esa columna el color que falta en el renglón. Demostraremos que B es intercalada. Supongamos que no lo es, entonces debe ocurrir alguno de los siguientes casos:

1. algún color r se repite en la última columna de B, o

2. existe alguna submatriz 2×2 con tres colores.

En el primer caso, podemos suponer que r está al menos en los últimos dos renglones de B, tiene frecuencia $\leq n-3$ en A y entonces existe otro color b con frecuencia $n-1$. Ahora, los últimos dos renglones de A forman una submatriz de tipo $(2, n-1, n-1)$ de donde n es impar y esa submatriz es de la forma

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & a & b \\ 1 & 0 & 3 & 2 & \ldots & b & a \end{array}$$

Usando que A es intercalada y que b forma $(n-1)/2$ intercalaciones con a, nuestra matriz A debe ser de la forma

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & b & x & & & & & & 0 & 1 \\
b & a & & & & & & & 1 & 0 \\
& & a & b & & & & & 2 & 3 \\
& & b & a & & & & & 3 & 2 \\
& & & & \cdots & & & & \vdots & \vdots \\
& & & & & & a & b & u & v \\
& & & & & & b & a & v & u \\
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & & u & v & a & b \\
1 & 0 & 3 & 2 & \cdots & & v & u & b & a
\end{array}$$

Ahora, r aparece en algún renglón de A y podemos suponer que aparece en la posición marcada con una x en la matriz anterior. Esto obliga a que ahora A se vea como

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & b & r & u & & & 3 & & 0 & 1 \\
b & a & u & r & & & & & 1 & 0 \\
r & u & a & b & & & & & 2 & 3 \\
u & r & b & a & & & & & 3 & 2 \\
& & & & \cdots & & & & \vdots & \vdots \\
& & & & & & a & b & u & v \\
& & & & & & b & a & v & u \\
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & & u & v & a & b \\
1 & 0 & 3 & 2 & \cdots & & v & u & b & a
\end{array}$$

donde el color u no está en $\{0, 1, 2, 3, a, b, r\}$, pero esta matriz ya no es intercalada (mire las casillas con color 3 de los renglones superior e inferior y las submatrices 2×2 que las contienen). Por lo tanto, el color r no se repite en la última columna de B.

Un análisis similar al del lema 4.2 demuestra que el segundo caso tampoco es posible, por lo tanto B es intercalada de tipo $(n-1, n, n)$ y por el lema 4.2 se tiene que n es potencia de 2. $\square$

Evidentemente las matrices de tipo (n, n, n) son diádicas. Hemos visto que las únicas matrices de tipos $(n-1, n, n)$ y $(n-1, n-1, n)$ son submatrices de las primeras, por lo tanto también son diádicas.

También podemos deducir los siguientes resultados:

Corolario 4.1 *Si ninguna de n y $n-1$ son potencias de 2 entonces*

$$N(n,n) \geq N(n-1,n-1) \geq n+1.$$

Corolario 4.2 *Sean a, b naturales tales que $2^{t-1} < 2^t - 2 \leq a, b \leq 2^t$, entonces $N(a,b) = 2^t$.*

Corolario 4.3 *Sea a tal que $2^{t-1} < 2^t - 2 \leq a \leq 2^t$, entonces para toda b tal que $2^t - a + 1 \leq b \leq 2^t$ se cumple que $N(a,b) = 2^t$.*

Sea R un subconjunto de $\mathcal{D}$ y sea $G(R)$ el subgrupo de $\mathcal{D}$ generado por R. Denotemos por $E(R)$ al subconjunto de $G(R)$ de aquellos elementos que son suma de un número par de elementos de R. Denotemos por $\langle R \rangle$ a la matriz diádica que tiene como generadores a R en las columnas y a $E(R)$ en los renglones.

Una matriz intercalada A está *incluida por columnas* en otra matriz intercalada B si A es *isotópica por columnas* (es decir, no se permite hacer permutaciones de renglones) a una submatriz de B. Una matriz intercalada es *conexa* si para cualquier partición de sus columnas en dos conjuntos X y Y existe al menos un color que se encuentra en ambos conjuntos. Una *componente conexa* de A es una submatriz conexa formada con columnas de A tal que no se le puede agregar ninguna otra columna de A y seguir siendo conexa. Una matriz intercalada es *homogenea* si existe un subconjunto R de $\mathcal{D}$ tal que cada componente conexa de M está incluida por columnas en $\langle R \rangle$.

En [CGM1] se demuestra que:

Teorema 4.1 *Sea M una matriz intercalada. Entonces M es diádica si y sólo si es homogenea.*

Usaremos este criterio para demostrar que toda matriz intercalada de orden $r \times s$ con $r \leq 3$ es diádica.

Teorema 4.2 *Si A es una matriz intercalada de orden $r \times s$ con $r \leq 3$ entonces A es diádica.*

Demostración. Sea $r = 3$ y a uno de los colores de A. Este color define una componente conexa de A que es isotópica por columnas a una submatriz de

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

la cual está incluida en $\mathcal{D}$. Por lo tanto, A es homogenea y se sigue que es diádica. Como cualquier matriz intercalada de orden $1 \times s$ ó $2 \times s$ se puede extender a una matriz intercalada de orden $3 \times s$ (agregando renglones con colores nuevos), hemos terminado. $\square$

Una búsqueda por computadora mostró que:

Teorema 4.3 *Si A es una matriz intercalada de tipo $(r, s, r \circ s)$ con $r.s \leq 8$ entonces A es diádica.*

Ambos resultados son los mejores posibles debido a la existencia de una matriz intercalada no diádica de tipo $(4, 9, 4 \circ 9)$. Además, si $\{r, s\} = \{5, 9\}$ ó $\{5, 16\}$ y la matriz A de orden $r \times s$ es óptima entonces A es diádica.

4.2 Matrices intercaladas no diádicas

Una *cointercalación* es una submatriz de orden 2×2 con cuatro colores distintos. Denotemos por $|X|$ a la cardinalidad del conjunto X y por $v(B)$ al conjunto de colores distintos en la matriz B. Sea Δ el operador diferencia simétrica. En [CGM1] podemos encontrar el siguiente teorema que caracteriza las matrices intercaladas diádicas:

Teorema 4.4 *Sea M una matriz intercalada. Entonces M es diádica o, en caso contrario, existe una familia $\mathcal{C}$ de cointercalaciones de M tal que $|\Delta_{C \in \mathcal{C}} v(C)| = 2$.*

A continuación, demostraremos algunos resultados para matrices intercaladas no diádicas de orden 4×4.

Lema 4.4 *Existen exactamente tres matrices intercaladas no diádicas de tipo $(4, 4, n)$ (salvo isotopía). Además $n = 10$ en todos los casos.*

Demostración. Es fácil ver que las únicas matrices con las propiedades requeridas son:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

En M_1 podemos tomar $\mathcal{C} = \{\{0,2,4,6\},\{0,2,4,9\}\}$ con $\Delta = \{6,9\}$, en M_2 podemos tomar a $\mathcal{C} = \{\{0,2,4,6\},\{0,2,6,9\}\}$ con $\Delta = \{4,9\}$, y en M_3 podemos tomar a $\mathcal{C} = \{\{0,2,5,6\},\{0,5,6,9\}\}$ con $\Delta = \{2,9\}$.

Las tres matrices tienen exactamente 10 colores distintos y ninguno de ellos tiene frecuencia ≥ 3. $\square$

Lema 4.5 *Toda matriz intercalada no diádica de orden $4 \times s$ contiene a alguna de M_1, M_2, M_3 como submatriz.*

Demostración. Sea A una matriz intercalada no diádica de orden $4 \times s$. Considere un color 0 en A de frecuencia máxima f. Si $f = 4$ entonces 0 genera una submatriz de A de alguna de las siguientes formas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo ambas diádicas y con la propiedad de que ninguno de los colores que aparecen en ellas puede aparecer en ninguna otra columna de A.

Si $f = 3$ el color 0 genera las siguientes submatrices:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(A contiene como submatriz al menos a las primeras tres columnas de ellas) siendo ambas diádicas y con la propiedad de que ninguno de los colores de una submatriz maximal de las anteriores (que sea submatriz de A) puede aparecer en ninguna otra columna de A.

En cualquiera de los anteriores dos casos podemos eliminar una o dos columnas que contienen al color 0 preservando la propiedad de que la matriz así obtenida es no diádica. Por lo tanto, podemos suponer que ningún color de A tiene frecuencia > 2.

Todo color con frecuencia 2 está apareado con otro de frecuencia 2 en una intercalación. Esta pareja de 2 colores ocupa entonces 4 coordenadas en A. Como A tiene $4s$ coordenadas, existe un múltiplo de 4 de colores con frecuencia 1. Podemos suponer que no existe ninguna columna con cuatro colores de frecuencia 1, pues al eliminarla de A sigue siendo no diádica. Claramente todos los colores de frecuencia 1 aparecen a pares en las columnas de A. Sean a, b, c, d cuatro colores de frecuencia 1 en A. entonces pueden estar colocados como sigue:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ 2 & c \\ 3 & d \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 1 & d \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde $0, 1, 2, 3$ son colores de frecuencia 2 (no necesariamente distintos). Si A contiene al menos 8 colores de frecuencia 1, entonces contiene a B_3 pues al menos dos columnas de A contendrán a sus colores de frecuencia 1 en dos renglones comunes. Si A sólo tiene 4 colores de frecuencia 1 y no contiene a B_3 como submatriz, entonces es imposible que A contenga a B_2 como submatriz, de donde A contiene a B_1 y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 6 & 7 & \cdots & n-1 & n \\ b & 3 & 2 & 7 & 6 & \cdots & n & n-1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & \cdots & n-3 & n-2 & c \\ 1 & 0 & 5 & 4 & \cdots & n-2 & n-3 & d \end{pmatrix}$$

En cualquiera de los casos A contiene a M_1, M_2 ó M_3. □

Lema 4.6 *Ninguna matriz intercalada simétrica contiene a M_1, M_2 ó M_3 como submatriz.*

Demostración. Sea A una matriz intercalada simétrica y suponga que contiene a M_i $(i = 1, 2, 3)$ como submatriz, entonces también contiene a M_i^T como submatriz. Considere los renglones y columnas ocupados por M_i, M_i^T y la submatriz B de A formada precisamente por esos renglones y columnas. Demostraremos que B no puede ser intercalada y, por lo tanto, tampoco A.

Podemos permutar los renglones y columnas de B de modo que M_i ocupe la submatriz de orden 4×4 en la esquina inferior izquierda y que M_i^T ocupe la submatriz de orden 4×4 en la esquina superior derecha. La matriz C obtenida no necesariamente es simétrica. Es posible que M_i se intersecte con M_i^T en un color de frecuencia 1 ó 2, o que no se intersecten. Veamos la prueba para el último caso.

Caso 1. C contiene a M_1.

$$C = \begin{pmatrix} - & - & - & - & 0 & 1 & 4 & 5 \\ a_3 & - & - & - & 1 & 0 & 5 & 4 \\ - & - & - & - & 2 & 3 & 6 & 8 \\ - & - & a_1 & - & 3 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & - & a_2 & - & - \\ 1 & 0 & 3 & 2 & - & - & - & - \\ 4 & 5 & 6 & 7 & - & - & - & - \\ 5 & 4 & 8 & 9 & - & - & a_4 & - \end{pmatrix}$$

Si $a_1 = a$, entonces obtenemos que $a_2 = a$, $a_3 = a$ y $a_4 = a$, de donde los colores 7 y 8 deberían ser iguales, contradicción.

Caso 2. C contiene a M_2.

$$C = \begin{pmatrix} - & b_3 & - & c_3 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ - & - & - & - & 1 & 0 & 5 & 6 \\ - & c_2 & - & b_1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ - & - & - & - & 3 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & - & b_2 & - & - \\ 1 & 0 & 3 & 2 & - & - & - & - \\ 4 & 5 & 6 & 7 & - & - & - & - \\ 8 & 6 & 5 & 9 & - & - & c_1 & - \end{pmatrix}$$

Si $b_1 = b, c_1 = c$, entonces obtenemos que $b_2 = b$, $b_3 = b$, $c_2 = c$, $c_3 = c$, de donde los colores 4 y 9 deberían ser iguales, contradicción.

Caso 3. C contiene a M_3.

$$C = \begin{pmatrix} - & - & - & - & 0 & 1 & 6 & 7 \\ e_1 & - & - & - & 1 & 0 & 7 & 6 \\ - & - & - & - & 2 & 4 & 5 & 8 \\ - & - & d_1 & - & 3 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & - & e_2 & - & d_3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & - & - & - & - \\ 6 & 7 & 5 & 4 & - & d_2 & - & e_3 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Si $d_1 = d, e_1 = e$, entonces obtenemos que $e_2 = e$, $e_3 = e$, $d_2 = d$, $d_3 = d$, de donde los colores 2 y 9 deberían ser iguales, contradicción.

La prueba es similar en los casos donde M_i se intersecta con M_i^T en un color de frecuencia 1 ó 2. □

5 Particiones de matrices intercaladas

En esta sección introduciremos el concepto de partición de una matriz intercalada y calcularemos las particiones asociadas a las submatrices principales de la tabla de Cayley del grupo $\mathcal{D}$.

Definición 5.1 *Una* partición Π *del entero P es una lista de la forma*

$$\Pi = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot n_m^{k_m}$$

de enteros tal que:

1. $n_i = n_j$ *si y sólo si* $i = j$
2. $k_i > 0$ *para toda* i
3. $P = k_1 n_1 + k_2 n_2 + \cdots + k_m n_m$.

Al número m se le llama la longitud *de la partición y a las n_i se les llama* sumandos. *Dos particiones Π_1, Π_2 del mismo entero P son consideradas iguales si difieren en el orden de sus sumandos. Por convención llamaremos ϵ a la partición de $P = 0$ (vacía).*

Ejemplo 5.1 *Las particiones de 5 son:* $5^1, 1^1{\cdot}4^1, 2^1{\cdot}3^1, 1^2{\cdot}3^1, 1^1{\cdot}2^2, 1^3{\cdot}2^1, 1^5$.

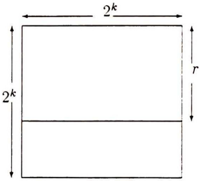
Definición 5.2 *Sea A una matriz intercalada de tipo (r, s, n), entonces la partición $\Pi(A)$ asociada con A es la partición Π de rs tal que existen exactamente k_i colores que aparecen, cada uno, exactamente n_i veces en las coordenadas de A. En el caso de que A sea una submatriz principal de la tabla del grupo $\mathcal{D}$, su partición asociada también se denotará por $\Pi(r, s)$.*

Ejemplo 5.2 $\Pi(3, 6) = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^4$.

Definición 5.3 *Una partición Π de rs se dice realizable si existe una matriz intercalada A de tipo (r, s, n) tal que $\Pi = \Pi(A)$.*

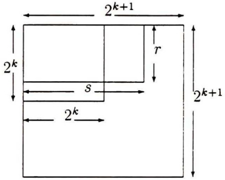
Ahora procederemos a calcular $\Pi(r, s)$.

Lema 5.1 *Si $r \leq 2^k$ entonces $\Pi(r, 2^k) = r^{2^k}$.*



Demostración. Sabemos que $N(2^k, 2^k) = 2^k$, por lo tanto, todos los colores son diagonalmente completos, lo que implica que cada uno aparece exactamente una vez en cada columna. Si nos fijamos sólo en los primeros r renglones tendremos que cada uno de los 2^k colores aparece r veces. □

Lema 5.2 *Si* $r \leq 2^k < s < 2^{k+1}$, *entonces* $\Pi(r,s) = \Pi(r, s-2^k) \cdot r^{2^k}$.



Demostración. La matriz de orden $r \times s$ se puede dividir en dos submatrices, una de orden $r \times 2^k$ y la otra de orden $r \times (s - 2^k)$, las cuales no tienen colores comunes. Por lo tanto, la partición asociada a la matriz original es la concatenación de las particiones asociadas a estas dos submatrices, las cuales son, respectivamente, r^{2^k} y $\Pi(r, s-2^k)$. □

Definición 5.4 *Si Π es la partición*

$$n_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot n_m^{k_m}$$

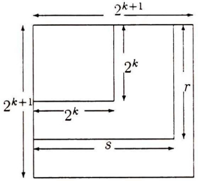
y n es un entero, entonces $\Pi \odot n$ se define como la partición

$$(n_1 + n)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (n_m + n)^{k_m} \cdot n^{n-(k_1+\cdots+k_m)}$$

para $n \geq k_1 + \cdots + k_m$.

Lema 5.3 *Si $2^k < r, s < 2^{k+1}$ entonces*

$$\Pi(r,s) = (r + s - 2^{k+1})^{2^k} \cdot (\Pi(r - 2^k, s - 2^k) \odot 2^k).$$



Demostración. Podemos dividir la matriz de orden $r \times s$ en cuatro submatrices: A de $2^k \times 2^k$, B de $2^k \times (s - 2^k)$, C de $(r - 2^k) \times 2^k$ y D de $(r - 2^k) \times (s - 2^k)$. Es claro que B y C contienen a los mismos colores, y que los colores de D son un subconjunto de los colores de A. De hecho, podemos unir a C con la transpuesta de B y obtenemos una matriz con partición $\Pi(r + s - 2^{k+1}, 2^k) = (r + s - 2^{k+1})^{2^k}$. Para el término derecho, basta ver que si $\Pi(D) = n_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot n_m^{k_m}$, entonces los colores de D aparecerán otras 2^k veces en A. Los colores de A que no están en D aparecerán exactamente 2^k veces en toda la matriz. Esto es precisamente la definición de $\Pi(D) \odot 2^k$. □

Teorema 5.1 $\Pi(r, s)$ *está dado por:*

$$\Pi(r,s) = \begin{cases} \epsilon & r = 0 \text{ ó } s = 0 \\ \Pi(r, s - 2^k) \cdot r^{2^k} & r \leq 2^k \leq s \leq 2^{k+1} \\ (r + s - 2^{k+1})^{2^k} \cdot (\Pi(r - 2^k, s - 2^k) \odot 2^k) & 2^k < r, s < 2^{k+1} \end{cases}$$

Demostración. Inmediato de los tres lemas anteriores. □

En términos de particiones podemos reformular la conjetura de Yuzvinsky como sigue:

Conjetura 5.1 *Sea A una matriz intercalada de tipo (r, s, n) tal que*

$$\Pi(A) = n_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot n_m^{k_m}$$

entonces $n = k_1 + \cdots + k_m \geq r \circ s$.

En el apéndice C se puede encontrar una tabla de particiones realizables en matrices intercaladas óptimas.

6 La conjetura en el rango 32×32

Como se mencionó anteriormente, se sabe que la conjetura de Yuzvinsky es cierta cuando $r \leq 5$ y cuando $r, s \leq 16$. En esta sección presentamos una prueba del primer hecho y también un estudio de las condiciones que se deben de cumplir para que la conjetura sea cierta cuando $r, s \leq 32$.

6.1 Signabilidad

El siguiente resultado es bien conocido (ver por ejemplo [CEGMZ]):

Teorema 6.1 *Sea A una matriz intercalada signable de tipo (r, s, n), entonces $n \geq r \circ s$.*

Demostración. Bajo la hipótesis, la matriz A determina una fórmula

$$(x_1^2 + \cdots + x_r^2)(y_1^2 + \cdots + y_s^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2.$$

(Como en el ejemplo 1.3) Ahora, por un teorema de Hopf y Stiefel [H, St] se tiene que $n \geq r \circ s$. □

Llamemos *intercalación* a una submatriz 2×2 con dos colores. La *matriz de incidencia* de A es la matriz $\tilde{A}$ que tiene como renglones a sus coordenadas, como columnas a sus intercalaciones, y como colores $\tilde{A}_{CI} = 1$ si la intercalación I ocupa la coordenada C y $\tilde{A}_{CI} = 0$ en otro caso.

Sea $\vec{1}$ el vector con todas sus entradas iguales a 1. En [CGM2, Yuz] podemos encontrar que:

Lema 6.1 *A es signable si y sólo si el sistema de ecuaciones $x\tilde{A} = \vec{1}$ tiene solución sobre F_2.*

Lema 6.2 *Uno y sólo uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene solución sobre F_2: (1) $x\tilde{A} = \vec{1}$ ó (2) $\tilde{A}w = 0, \vec{1}w = 1$.*

En [CGM4] se demuestra que las matrices intercaladas con cinco renglones o menos son signables:

Teorema 6.2 *Toda matriz intercalada de tipo (r, s, n) con $r \leq 5$ es signable.*

Demostración. Sea w una solución al sistema de ecuaciones (2) del lema anterior. Supongamos que w tiene a_i intercalaciones en la columna i de A. Al menor de los a_i lo llamamos el *tipo columna* de w. Definimos el *tipo columna* de A como el mínimo de los tipo columna de los w que contiene.

Diremos que una matriz intercalada es *conexa* si para toda partición de sus columnas en dos conjuntos no vacíos X, Y existe un color c que se encuentra tanto en X como en Y. Diremos que una matriz intercalada es *completa* si cada uno de sus renglones es una permutación de todos los demás.

Supongamos, para una contradicción, que existe una matriz intercalada A no signable con cinco renglones. Podemos suponer que A tiene el menor número de columnas posible y, de entre aquellas matrices no signables con dicho número de columnas, podemos además suponer que A tiene el menor tipo columna posible. En particular, A tiene al menos cuatro casillas en cada columna, al menos cuatro intercalaciones en la primera columna y es conexa.

Supongamos que A alcanza su tipo columna en w y que w alcanza su tipo columna en la primera columna.

1. A no puede contener una submatriz principal 4×3 de $\mathcal{D}$. Si A tuviera tal submatriz, entonces A tendría una submatriz principal 5×8 de $\mathcal{D}$. Pero siendo ésta última completa, conexa y signable, A no sería conexa, lo cual es una contradicción.

$$\begin{array}{ccc|ccccc} a & b & c & d & e & f & g & - \\ b & a & d & c & f & e & - & g \\ c & d & a & b & g & - & e & f \\ d & c & b & a & - & g & f & e \\ e & f & g & - & a & b & c & d \end{array}$$

2. Si alguna casilla de las ocupadas por w en la primera columna pertenece a 4 intercalaciones, entonces existe en A una submatriz principal 3×4 de $\mathcal{D}$ que usa la primera columna. Luego, mediante una operación elemental podemos reducir el tipo columna de w, y por lo tanto el de A, lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada casilla de A en la primera columna pertenece a lo más a dos intercalaciones de w y por lo tanto, A es de tipo columna 4 ó 5.

3. Supongamos que A es de tipo columna 5. En particular w usa las cinco casillas de la primera columna. Entonces A contiene necesariamente una subestructura de la forma:

$$\begin{array}{cccccc}
a & b & c & & & \\
b & a & & d & & \\
c & & a & & e & \\
d & & & b & & e \\
e & & & & c & d
\end{array}$$

Esta matriz se puede llenar en forma única como sigue:

$$\begin{array}{cccccc}
a & b & c & f & g & h \\
b & a & i & d & j & k \\
c & i & a & l & e & m \\
d & f & n & b & m & e \\
e & o & g & k & c & d
\end{array}$$

Esta matriz se extiende a su vez, también de forma única, a:

$$\begin{array}{cccccc|cccccccccc}
a & b & c & f & g & h & d & e & i & n & o & l & j & k & m & - \\
b & a & i & d & j & k & f & o & c & b & e & n & g & h & - & m \\
c & i & a & l & e & m & n & g & b & d & j & f & o & - & h & k \\
d & f & n & b & m & e & a & h & l & c & k & i & - & o & g & j \\
e & o & g & k & c & d & h & a & j & m & b & - & i & f & n & l
\end{array}$$

La cual es una matriz completa, conexa y signable. Esto contradice que A es conexa.

4. Supongamos que A es de tipo columna 4. Entonces w tiene exactamente cuatro intercalaciones y ocupa exactamente cuatro casillas de la primera columna de A. Necesariamente A tiene una subestructura:

$$\begin{array}{ccccc}
a & b & c & & \\
b & a & & d & \\
c & & a & & d \\
d & & & b & c
\end{array}$$

Esta matriz se puede llenar en forma única como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
a & b & c & e & f \\
b & a & g & d & h \\
c & g & a & h & d \\
d & e & f & b & c
\end{array}$$

(a) Si en el quinto renglón de esta submatriz aparece uno de los colores de la misma, entonces se obtiene la única matriz intercalada 5×5 con frecuencias $\{2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4\}$, la cual se extiende de forma única a una 5×8 completa, conexa y signable. Contradicción.

(b) Alguno de los colores e o g de la segunda columna pertenece a w, sin pérdida de generalidad supongamos que es g. Entonces g debe aparecer en una nueva columna. Si

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & e & f & h \\ b & a & g & d & h & f \\ c & g & a & h & d & e \\ d & e & f & b & c & g \end{array}$$

entonces se obtiene una matriz 4×6 con 12 intercalaciones cuya diferencia simétrica es cero, de ellas cuatro están en la primera columna. Esto contradice la minimalidad de A. Por lo tanto g está también en un nuevo renglón

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & e & f & - \\ b & a & g & d & h & - \\ c & g & a & h & d & - \\ d & e & f & b & c & - \\ - & - & - & - & - & g \end{array}$$

Esto en particular dice que el color g sólo puede aparecer tres veces en A, por lo que las intercalaciones que lo contienen deben pertenecer a w. Esta submatriz sólo puede completarse de la forma

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & e & f & i \\ b & a & g & d & h & j \\ c & g & a & h & d & k \\ d & e & f & b & c & l \\ m & k & j & n & o & g \end{array}$$

Al menos uno de los colores i, l pertenece a w, y por lo tanto debe aparecer al menos otras dos veces en A. Esta submatriz puede extenderse agregando una columna con al menos uno de los colores i, l apareciendo en alguno de los renglones 2,3 ó 5. La nueva submatriz se extiende de forma única a una completa, conexa y signable 5×16, lo cual es una contradicción.

Esto termina la prueba del teorema. □

Corolario 6.1 *Sea A una matriz intercalada de tipo (r, s, n) con $r \leq 5$, entonces $n \geq r \circ s$.*

6.2 El rango 32×32

El siguiente resultado es bien conocido y nos muestra una forma alternativa de construir la tabla de Cayley de $\mathcal{D}$:

Lema 6.3 *Sea N una matriz $r \times s$ tal que a_{ij} es el menor natural que no aparece en el conjunto $\{a_{i0}, \ldots, a_{i,j-1}\} \cup \{a_{0j}, \ldots, a_{i-1,j}\}$, entonces N es la matriz principal $r \times s$ de $\mathcal{D}$.*

Demostración. Mostraremos por inducción en i que $a_{ij} = i \oplus j$. Para $i = 0$ es claro que $a_{0j} = j = 0 \oplus j$. Supongamos que $a_{i'j} = i' \oplus j$ para toda $i' < i$ y que $a_{ij'} = i \oplus j'$ para toda $j' < j$. Por el lema 2.1 sabemos que $l = i \oplus j \notin \{a_{i0}, \ldots, a_{i,j-1}\} \cup \{a_{0j}, \ldots, a_{i-1,j}\} = \{i \oplus 0, \ldots i \oplus (j-1)\} \cup \{0 \oplus j, \ldots, (i-1) \oplus j\}$.

Falta ver que toda $n < l$ se encuentra en ese conjunto. Sea k tal que $i, j < 2^k$ y considere las expansiones binarias de i, j, l, n. Sea m el mayor natural tal que $n_m \neq l_m$. Como $n < l$ es fácil ver que $n_m = 0$ y que $l_m = 1$. Esto implica que $i_m \oplus j_m = 1$, es decir, uno de $\{i_m, j_m\}$ es 1 y el otro 0. Suponga sin pérdida de generalidad que $i_m = 0$ y $j_m = 1$ y considere el número $j' < j$ que tiene como expansión binaria $j_k, \ldots, j_{m+1}, 0, i_{m-1} \oplus n_{m-1}, \ldots, i_0 \oplus n_0$. Entonces, $a_{ij'} = i \oplus j' = n$ y terminamos. □

En lo que sigue necesitaremos el siguiente:

Lema 6.4 *Para toda r, s se cumple que $r + s - 1 \geq r \circ s$.*

Demostración. Supongamos que $r, s \leq 2^t$. Haremos la prueba por inducción en t. Para $t = 0$ es cierto. Suponga que la desigualdad es cierta para todos los $r, s \leq 2^t$. Ahora considere $r, s \leq 2^{t+1}$. Si $r, s \leq 2^t$ ya acabamos. Si $r \leq 2^t < s \leq 2^{t+1}$ sea $z = s - 2^t$. Entonces $r \circ s = 2^t + r \circ z \leq 2^t + r + z - 1 = r + s - 1$. Finalmente, si $2^t < r, s \leq 2^{t+1}$ entonces $r \circ s = 2^{t+1} < r + s$, de donde $r \circ s \leq r + s - 1$. □

Ahora supongamos que la conjetura de Yuzvinsky es falsa. Sea A de tipo (r, s, n) un contraejemplo con $r + s$ mínimo a la conjetura, es decir, con $n < r \circ s$ y sea N la matriz principal de $r \times s$ de $\mathcal{D}$ de tipo $(r, s, r \circ s)$. Sea $c = r \circ s - 1$.

Supongamos que el color c se encuentra en la submatriz principal de $p \times q$ de N con $p < r$ ó $q < s$. Entonces, por la minimalidad de A se tiene que esta submatriz es óptima de tipo $(p, q, c + 1)$, pero entonces la submatriz principal de $p \times q$ de A con $m \leq n$ colores tiene al menos $c + 1$ colores, es decir $c + 1 \leq m \leq n < c + 1$, lo cual es una contradicción, de donde el color c sólo aparece en la esquina inferior derecha de N.

Como c tiene frecuencia 1, no hay intercalaciones en N que lo contengan, y se tiene que todos los colores de los últimos renglón y columna son todos distintos: por lo que hay al menos $(r-1)+(s-1)+1 = r+s-1$ colores y esto junto con el segundo lema dice que $r \circ s = r + s - 1$ y entonces $n \leq r + s - 2$.

Ahora, se puede ver fácilmente que el color $c - 1$ tiene que aparecer en la submatriz principal $r \times (s - 1)$ ó $(r - 1) \times s$ de N de modo que $r \circ (s - 1) = r + s - 2$ ó $(r - 1) \circ s = r + s - 2$. Cualquiera que sea el caso, esa submatriz es óptima de donde cualquier matriz $r \times s$ tiene al menos $r + s - 2$ colores, de donde finalmente obtenemos que $n = r + s - 2$. También el color a_{rs} tiene frecuencia al menos 2 (pues en otro caso habría $\geq r + s - 1$ colores en A).

Como A tiene $n < r \circ s$ entonces A no es diádica de donde (r, s, n) no es pura por lo que existe k con $n - r < k < s$ tal que $\binom{n}{k} \equiv 1$. Entonces $s - 2 < k < s$ y finalmente $k = s - 1$. De aquí se ve que $(r - 1) \oplus (s - 1) = (r - 1) + (s - 1)$.

Si queremos extender la conjetura de Yuzvinsky hasta $r, s \leq 32$, basta demostrar que no existen matrices intercaladas de ninguno de los 37 tipos:

- $(17, s, 15 + s)$ para $6 \leq s \leq 16$,
- $(18, 2s + 1, 17 + 2s)$ para $3 \leq s \leq 7$,
- $(19, 6, 23)$, $(19, 9, 26)$, $(19, 10, 27)$, $(19, 13, 30)$, $(19, 14, 31)$,
- $(20, 9, 27)$, $(20, 13, 31)$,
- $(21, s, 19 + s)$ para $9 \leq s \leq 12$,
- $(22, 9, 29)$, $(22, 11, 31)$, $(23, 9, 30)$, $(23, 10, 31)$, $(24, 9, 31)$,

- $(25, s, 23+s)$ para $6 \leq s \leq 8$,
- $(26, 7, 31)$, $(27, 6, 31)$

pues son los únicos valores de $r, s \leq 32$ tales que $r \circ s = r + s - 1$ y que no están cubiertos por los casos ya resueltos.

Notemos que en 25 de estos casos se tiene que $r \circ s - 1$ es primo o potencia de un primo y nos podemos auxiliar de la reformulación de la sección 3. (Conjetura 3.1)

Cabe mencionar que si alguna de esas matrices existiera, entonces tendría que ser no diádica.

7 Algoritmos

Presentaré el pseudocódigo de los algoritmos más importantes empleados durante el desarrollo de este trabajo. Los programas que implantan estos algoritmos están escritos en ANSI C y han sido compilados sin modificaciones en los siguientes ambientes:

- PC Pentium, MS-DOS, Turbo C++.
- PC Pentium, Linux, Gnu C Compiler.
- HP 9000, HP-UX, C Compiler.
- Dec Alpha, OSF/1, C Compiler.

Los programas completos se pueden encontrar en el disco que acompaña a este documento. En esta sección A será una matriz intercalada de tipo (r, s, n) con $1 \leq r, s \leq 16$ y $1 \leq n \leq 256$, excepto donde se indique algo distinto. Los colores de A están en el conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$.

Representación de conjuntos

En ANSI C no existe un tipo conjunto, sin embargo, se pueden implantar de forma muy eficiente conjuntos de cardinalidad máxima dada usando operaciones de bits sobre enteros (`char`, `int`, `long`).

Como ejemplo, supongamos que deseamos conjuntos de cardinalidad máxima 32, entonces podemos usar una variable de tipo `long` (que tiene al menos 32 bits en ANSI C) y usar cada uno de sus bits para representar a cada elemento del conjunto: 1 si está presente y 0 si no está.

Si `a` y `b` son variables de tipo `long` entonces `a | b` representa a la unión de `a` y `b`, `a & b` a la intersección, `a ^ b` a la diferencia simétrica y `~ a` al complemento de `a`.

Para determinar si un elemento existe o no podemos usar un vector constante `long bit[32]` tal que `bit[i]` $= 2^i$ para $0 \leq i < 32$. De este modo, `a & bit[i]` es verdadero si y sólo si $i \in a$. Con la misma idea podemos agregar (`a |= bit[i]`) o eliminar (`a &= ~ bit[i]`) un elemento de a.

De ahora en adelante supondremos que tenemos una implantación de operaciones de conjuntos de cardinalidad máxima 256 (usando variables de tipo `long SET[8]`) así como de la función $card(a)$ que regresa la cantidad de elementos del conjunto a.

Decidir si A es intercalada

Sean $R_i = \{A_{ij} | 1 \leq j \leq s\}$ para $1 \leq i \leq r$ y $C_j = \{A_{ij} | 1 \leq i \leq r\}$ para $1 \leq j \leq s$. Entonces:

1. Si para alguna i se cumple que $card(R_i) < s$ entonces A no es intercalada.
2. Si para alguna j se cumple que $card(C_j) < r$ entonces A no es intercalada.
3. Si para algunas $i < k$ y $j < l$ se cumple que $\{A_{ij}, A_{kl}, A_{il}, A_{kj}\}$ tiene cardinalidad 3 entonces A no es intercalada.
4. En cualquier otro caso A es intercalada.

Calcular $r \circ s$

Véase la definición recursiva que se encuentra en la sección 1.

Generar matrices intercaladas

Sean A y B dos matrices intercaladas de tipos (r, s, n) y (r, s, m) respectivamente. Diremos que $A \prec B$ si, cuando leemos los colores de A y B por renglones (de izquierda a derecha y de arriba a abajo), el primer color $A_{ij} \neq B_{ij}$ cumple que $A_{ij} < B_{ij}$. Este es el orden *lexicográfico* para matrices intercaladas.

Como hay una cantidad finita de matrices intercaladas $r \times s$ (con colores en $\{0, 1, \ldots, rs - 1\}$) podemos ordenarlas $A_1 \prec \cdots \prec A_Z$. En este caso A_1 resulta ser la matriz N del lema 9.1. No es práctico listar estas Z matrices pues cada una de ellas tiene una gran cantidad de matrices isotópicas que también serían listadas. Lo ideal sería listar sólo matrices intercaladas no isotópicas $B_1 \prec \cdots \prec B_X$ donde $B_1 = A_1$ y si $B_i = A_j$ entonces no existe ninguna matriz A_k isotópica a A_j con $k < j$. Esta tarea tampoco es práctica pues implica almacenar la lista B para decidir si cada matriz A_i generada es isotópica a alguna generada previamente.

Entonces, debemos conformarnos con un listado intermedio (es decir, uno donde evitemos tanto como se pueda generar matrices isotópicas y en donde no se tenga que almacenar la lista completa). Una posible solución está basada en la siguiente observación: toda matriz intercalada A tiene una isotópica B tal que, cuando leemos los colores de B por renglones (de izquierda a derecha y de arriba a abajo), encontramos los colores nuevos en el orden $0, 1, \ldots, n-1$ sin brincarse ninguno. Esto implica en particular que el primer renglón de B es $0, 1, \ldots, s-1$. Es más, podemos encontrar a B de modo que los colores de su primer columna estén en orden creciente de arriba a abajo. Si llamamos $C_1 \prec \cdots \prec C_Y$ a la lista de matrices intercaladas que cumplen con esta propiedad, entonces es fácil convencerse de que $X \leq Y \leq Z$ (y de que en general $X < Y < Z$). También es cierto que $C_1 = A_1$ y C_Y es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & s-1 \\ s & s+1 & \cdots & 2s-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r-1)s & (r-1)s+1 & \cdots & rs-1 \end{pmatrix}$$

Es muy sencillo implementar un algoritmo de retroceso no recursivo para generar la lista C de matrices intercaladas:

1. Sean $i = 0, j = 0, m = 0$ (i es el renglón, j la columna y m el máximo color que se puede usar en la coordenada (i, j)).

2. Mientras $i < r, j < s, m < rs$.

3. Para cada color $0 \leq c \leq m$ prueba si $C_{ij} = c$ no viola las condiciones de intercalación (adicionalmente, si $i > 0, j = 0$ verifica que $C_{i-1,0} < c$).

4. Si la viola, retrocede una coordenada (si es necesario, disminuye m).

5. Si no la viola, avanza una coordenada (si $c = m$ incrementa m).

6. Si $i = r-1, j = s-1$ despliega la matriz generada y retrocede una coordenada (en caso necesario, disminuye m).

Generar matrices intercaladas óptimas

Se usa el algoritmo anterior, pero se evita el uso de algún color $c \geq r \circ s$. Esto se hace modificando el segundo paso del algoritmo anterior para que diga $m < r \circ s$.

Calcular la partición de $\mathcal{A}$

Considere al vector `int frec[256]` inicializado con ceros. Para toda $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ incrementa en uno el valor actual de $frec[\mathcal{A}_{ij}]$

En este momento `frec[i]` contiene la frecuencia del color i. Si ordenamos decrecientemente a `frec` obtenemos la partición de $\mathcal{A}$. Si la queremos expresar con la notación empleada aquí, debemos encontrar la cantidad (k_i) de sumandos iguales (es decir, colores con la misma frecuencia). Una búsqueda lineal puede efectuar este trabajo.

Decidir si $\mathcal{A}$ es diádica

Recordemos que $\mathcal{A}$ es diádica si es isotópica a una submatriz de la tabla del grupo $\mathcal{D}$. En [CGM1] se prueba que el siguiente algoritmo para decidir si una matriz intercalada es diádica es correcto:

1. Construya el sistema de ecuaciones $\mathcal{A}x = 0$ donde x_i es una variable que corresponde con el color i y los coeficientes de $\mathcal{A}$ están determinados por cada una de las ecuaciones de la forma $x_i \oplus x_j \oplus x_k \oplus x_l = 0$ para toda submatriz 2×2 de $\mathcal{A}$ con cuatro colores distintos (i, j, k, l).

2. Busque un subconjunto de estas ecuaciones tales que impliquen la ecuación $x_i \oplus x_j = 0$ para algunas $i \neq j$ (es decir, si la combinación lineal de algunos renglones de $\mathcal{A}$ es un renglón con exactamente dos coeficientes distintos de 0). Para ello proceda como sigue:

   (a) Diagonalice la matriz $\mathcal{A}$. Si se encuentra un renglón con dos coeficientes distintos de 0, terminamos.

   (b) Para todo renglón R de $\mathcal{A}$ considere a todos los renglones P que se encuentran arriba de R. Si existe algún P tal que $P \oplus R$ tiene dos coeficientes distintos de 0, terminamos.

3. $\mathcal{A}$ es diádica si y sólo si no existe tal subconjunto de ecuaciones.

Calcular el rango de $\mathcal{A}$

El paso 2(a) del algoritmo anterior calcula el rango de $\mathcal{A}$, siendo éste igual al número de renglones distintos de cero de la matriz diagonal resultante.

Resultados

El propósito de esta sección es recapitular los resultados obtenidos durante el desarrollo de este trabajo.

En la sección 1 se describieron algunas aplicaciones de las matrices intercaladas en las áreas de conocimiento común, comunicación de computadoras y diseño de experimentos.

En la sección 3 se probó que el conjunto de las matrices no intercaladas es una variedad algebraica construyendo un polinomio que tiene como raíces a ese conjunto (Teoremas 3.1 y 3.2). Se reformuló la conjetura de Yuzvinsky usando esta caracterización de las matrices intercaladas.

En la sección 4 se mostraron:

- resultados similares a los obtenidos por Yiu para matrices intercaladas de tipo (n, n, n) (Lemas 4.2 y 4.3)
- condiciones que aseguran que una matriz intercalada es diádica (Teoremas 4.2 y 4.3), y
- propiedades de las matrices intercaladas no diádicas de órden 4×4 (Lemas 4.4, 4.5 y 4.6).

En la sección 5 se calcularon las particiones asociadas a submatrices principales de la tabla de Cayley de $\mathcal{D}$ (Teorema 5.1). Además, se reformuló la conjetura de Yuzvinsky en términos de las particiones.

En la sección 6 se establecieron las condiciones necesarias para demostrar que la conjetura de Yuzvinsky es cierta en el rango 32×32.

En los apéndices se mostraron todos los resultados obtenidos con los programas desarrollados.

Results

The purpose of this section is to recapitulate the results obtained during the development of this work.

In section 1 we described some applications of intercalate matrices in common knowledge, computer communication and experiment design.

In section 3 we proved that the set of non intercalate matrices is an algebraic variety constructing a polynomial whose roots are precisely this set (Theorems 3.1 and 3.2). We reformulated Yuzvinsky's conjecture using this characterization of intercalate matrices.

In section 4 we showed:

- results similar to those obtained by Yiu for intercalate matrices of type (n, n, n) (Lemmas 4.2 and 4.3),
- conditions that ensure that an intercalate matrix is dyadic (Theorems 4.2 and 4.3), and
- properties of the non dyadic intercalate matrices of rank 4×4 (Lemmas 4.4, 4.5 and 4.6).

In section 5 we calculated the partitions associated to principal submatrices of the Cayley's table of $\mathcal{D}$ (Theorem 5.1). In addition, we reformulated Yuzvinsky's Conjecture in terms of partitions.

In section 6 we established the necessary conditions to show that Yuzvinsky's conjecture is true in the range 32×32.

In the appendices we showed all the results obtained with the programs developed.

A Tabla de $r \circ s$

La función de Pfister $r \circ s$ se puede calcular recursivamente como sigue:

$$r \circ s = \begin{cases} s \circ r & \text{si } r > s \\ r & \text{si } s = 1 \\ 2^{t-1} + r \circ (s - 2^{t-1}) & \text{si } r \leq 2^{t-1} < s \\ 2^t & \text{si } 2^{t-1} < r, s \leq 2^t \end{cases}$$

Los valores de $r \circ s$ para $r, s \leq 16$ son:

$r \circ s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16
3	3	4	4	4	7	8	8	8	11	12	12	12	15	16	16	16
4	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12	16	16	16	16
5	5	6	7	8	8	8	8	8	13	14	15	16	16	16	16	16
6	6	6	8	8	8	8	8	8	14	14	16	16	16	16	16	16
7	7	8	8	8	8	8	8	8	15	16	16	16	16	16	16	16
8	8	8	8	8	8	8	8	8	16	16	16	16	16	16	16	16
9	9	10	11	12	13	14	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16
10	10	10	12	12	14	14	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
11	11	12	12	12	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
12	12	12	12	12	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
13	13	14	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
14	14	14	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

B Cota superior a la cantidad de matrices intercaladas

Las cantidades mostradas fueron obtenidas con una búsqueda por computadora y algunos casos especiales para $r \leq 3$.

Optimas y subóptimas

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	3	11					
4	1	5	32	290				
5	1	8	98	1742	41312			
6	1	13	314	11823	625501			
7	1	21	1036	83881				
8	1	34	3584					
9	1	55	12804					

Optimas

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	1	1					
4	1	1	1	1				
5	1	1	1	50	113			
6	1	1	2	29	55	179		
7	1	1	1	12	15	57	137	
8	1	1	1	2	1	8	20	20
9	1	1	1	201	5	1241	948	

C Particiones de matrices intercaladas óptimas

Las particiones mostradas fueron obtenidas con una búsqueda por computadora. Cada partición puede estar asociada con varias matrices intercaladas del mismo tipo.

$r \backslash s$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1^1							
2	1^2	2^2						
3	1^3	$1^2 \cdot 2^2$	$2^3 \cdot 3^1$					
4	1^4	2^4	3^4	4^4				
5	1^5	$1^2 \cdot 2^4$	$1^3 \cdot 3^4$	$1^4 \cdot 4^4$ $2^4 \cdot 3^4$ $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^1$	$2^1 \cdot 3^5 \cdot 4^2$ $2^4 \cdot 4^3 \cdot 5^1$			
6	1^6	2^6	$2^6 \cdot 3^2$ $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^4$	3^8 $2^4 \cdot 4^4$ $2^2 \cdot 3^4 \cdot 4^2$	$3^2 \cdot 4^6$ $3^4 \cdot 4^2 \cdot 5^2$	$4^4 \cdot 5^4$ $4^6 \cdot 6^2$		
7	1^7	$1^2 \cdot 2^6$	$2^3 \cdot 3^5$	$3^4 \cdot 4^4$	$4^5 \cdot 5^3$	$5^6 \cdot 6^2$	$6^7 \cdot 7^1$	
8	1^8	2^8	3^8	4^8	5^8	6^8	7^8	8^8
9	1^9	$1^2 \cdot 2^8$	$1^3 \cdot 3^8$	3^{12} $1^4 \cdot 4^8$ $2^2 \cdot 3^8 \cdot 4^2$ $2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4$ $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^5$	$1^5 \cdot 5^8$	$1^6 \cdot 6^8$ $2^6 \cdot 5^6 \cdot 6^2$		
10	1^{10}	2^{10}	$2^6 \cdot 3^6$ $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^8$	$2^4 \cdot 4^8$ $3^8 \cdot 4^4$ $2^2 \cdot 3^4 \cdot 4^6$	$1^2 \cdot 2^4 \cdot 5^8$	$2^6 \cdot 6^8$		
11	1^{11}	$1^2 2^{10}$	$2^3 3^9$	$3^4 4^8$	$3^{10} 5^5$ $1^3 3^4 5^8$			

D Rango de la matriz $\mathcal{A}$ asociada a A

En esta tabla sólo se muestra el rango de $\mathcal{A}$ para cuando A es óptima. No hay matrices intercaladas óptimas no diádicas para $r, s \leq 8$. Note que en general el rango de $\mathcal{A}$ es menor en las matrices diádicas que en las no diádicas. No tenemos una prueba de esto.

Caso diádico

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0							
2	0	0						
3	0	1	1					
4	0	1	1	1				
5	0	2	3	4	4			
6	0	2	4	4	4	4		
7	0	3	4	4	4	4	4	
8	0	3	4	4	4	4	4	4
9	0	4	6	7	8	9		
10	0	4	7	7	9	9		
11	0	5	7	7	10	11		
12	0	5	7	7	11	11		
13	0	6	9	10,11	11	11		
14	0	6	10	10,11	11	11		
15	0	7	10	10,11	11	11		
16	0	7	10	10	11	11		

Caso no diádico

	1	2	3	4	5	6	7	8
9	-	-	-	8	-	10,11		
10	-	-	-	8	10	10,11		
11	-	-	-	8	11	12,13		
12	-	-	-	8	12	12,13		
13	-	-	-	11	12	12,13		
14	-		-	11	12	12,13		
15	-	-	-	11	12	12,13		
16	-	-	-	11	-	12,13		

E Tabla de $r \circ s - rango(\mathcal{A}_{rs})$

La siguiente tabla se incluye con el propósito de mostrar una posible relación entre $r \circ s$ y el $rango(\mathcal{A}_{rs})$ cuando A es una matriz intercalada con coloración mínima.

$r \circ s$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	2	2						
3	3	3	3					
4	4	3	3	4				
5	5	4	4	4	4			
6	6	4	4	4	4	4		
7	7	5	4	4	4	4	4	
8	8	5	4	4	4	4	4	4
9	9	6	5	5	5	5		
10	10	6	5	5	5	5		
11	11	7	5	5	5	5		
12	12	7	5	5	5	5		
13	13	8	6	5,6	5	5		
14	14	8	6	5,6	5	5		
15	15	9	6	5,6	5	5		
16	16	9	6	6	5	5		

Referencias

[A] Noga Alon. *Combinatorial Nullstellensatz.* Preprint (1996).

[ANR1] N. Alon, M. B. Nathanson, I. Z. Ruzsa. *Adding Distinct Congruence Classes Modulo a Prime.* American Math. Monthly 102, 250-255 (1995).

[ANR2] N. Alon, M. B. Nathanson, I. Z. Ruzsa. *The Polynomial Method and Restricted Sums of Congruence Classes.* J. Number Theory 56, 404-417 (1996).

[AT] N. Alon, M. Tarsi. *Colorings and Orientations of Graphs.* Combinatorica 12, 125-134 (1992).

[CGM1] Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler, José Martínez–Bernal. *Intercalate Matrices: I. Recognition of dyadic type.* Bol. Soc. Mat. Mex. (3) Vol. 3, 57-67 (1997).

[CGM2] Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler, José Martínez–Bernal. *Intercalate Matrices: II. A Characterization of Hurwitz-Radon Formulas and an Infinite Family of Forbidden Matrices.* Por aparecer en Bol. Soc. Mat. Mex. (1997).

[CGM3] Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler, José Martínez–Bernal. *Intercalate Matrices: III. Geometric Study of Minimal Obstructions.* Preprint (1997).

[CGM4] Gilberto Calvillo, Isidoro Gitler, José Martínez–Bernal. *Toda Matriz Intercalada con Cinco Renglones es Signable.* Preprint (1997).

[CEGMZ] Gilberto Calvillo, Shalom Eliahou, Isidoro Gitler, José Martínez–Bernal, Francisco Zaragoza. *On Yuzvinsky's Conjecture about Intercalate Matrices.* Preprint (1997).

[EK1] Shalom Eliahou, Michel Kervaire. *Sumsets in Vector Spaces over Finite Fields.* Preprint (1996).

[EK2] Shalom Eliahou, Michel Kervaire. *A Short Proof of Yuzvinsky's Theorem.* Preprint (1997).

[G] Fred Galvin. *The List Chromatic Index of a Bipartite Multigraph.* Journal of Combinatorial Theory, Series B 63, 153-158 (1995).

[H] H. Hopf. *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra.* Comment. Math. Helv. 13, 219-235 (1941).

[HW] Katherine Heinrich, W. D. Wallis. *The Maximum Number of Intercalates in a Latin Square.* Combinatorial Mathematics VIII, Lecture Notes in Math., Springer, 221-233 (1981).

[J] Jeannette C. M. Janssen. *The Dinitz Problem Solved for Rectangles.* Bulletin of the American Mathematical Society, V. 29 (2), 243-249 (1993).

[LS] T. Y. Lam, T. L. Smith. *On Yuzvinsky's Monomial Pairings.* Quart. J. Oxford (2), 44, 215-237 (1993).

[Sar] Irasema Sarmiento. *Non intercalate polynomial.* Comunicación personal (1997).

[Sh] D. B. Shapiro. *Products of Sums of Squares.* Expositiones Math. 2, 235-261 (1984).

[SY] T. L. Smith, Paul Y. H. Yiu. *Construction of Sums of Square Formulae with Integer Coefficients.* Bol. Soc. Mat. Mex. 37, 479-495 (1992).

[St] E. Stiefel. *Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus reellen Algebra.* Comment. Math. Helv. 13, 201-218 (1941).

[Yiu1] Paul Y. H. Yiu. *Sums of Squares with Integer Coefficients.* Canad. Math. Bull. 30, 318-324 (1987)

[Yiu2] Paul Y. H. Yiu. *On the Product of Two Sums of 16 Squares as a Sum of Squares of Integral Bilinear Forms.* Quart. J. Math. Oxford (2), 41, 463-500 (1990).

[Yuz] Sergey Yuzvinsky. *Orthogonal Pairings of Euclidean Spaces.* Michigan Math. J. 28 (1981).

Acta de Aprobación del Documento final de tesis
Sección de Computación
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Después de haber efectuado la revisión del trabajo de tesis titulado:

Coloraciones Mínimas de Matrices Intercaladas

realizado por Francisco Javier Zaragoza Martínez,

bajo la dirección del Doctor Isidoro Gitler y el M. en C. Feliú Sagols Troncoso,

el jurado considera que:

1. El documento final de tesis cumple con los requisitos para el Programa de Maestría en Ciencias.

2. Anexamos una reseña o crítica de la revisión del trabajo de tesis.

3. Solicitamos que la fecha de Examen de Grado se lleve a cabo el día 08 de Septiembre a las 11:00 horas.

Firman la presente el día 9 de Agosto de 1997

Dr. Isidoro Gitler Goldwain ____________________

Dr. Guillermo Morales Luna ____________________

M. en C. Feliú Sagols Troncoso ____________________

Dr. José Martínez Bernal ____________________

Evaluación de la tesis

Coloraciones Mínimas de Matrices Intercaladas
Francisco Javier Zaragoza Martínez
Departamento de Ingeniería Electrica
Sección de Computación, CINVESTAV–IPN

Nuestra apreciación general sobre la tesis del Sr. Zaragoza es muy positiva. Esta tesis tiene varios aspectos meritorios:

1. Nuestra impresión es que su desarrollo requirió un gran entendimiento matemático y computacional, el cual utilizó amplia y correctamente. El Sr. Zaragoza es capaz de exponer los conceptos con claridad y utilizarlos ingeniosamente para obtener otros resultados en el tema.

2. No es común encontrar temas o problemas donde un estudiante pueda, además de demostrar su capacidad de comprensión y exposición, desarrollar su creatividad y originalidad. En esta tesis se balancean muy bien estos aspectos.

3. Después de leerla, nos queda la impresión del gusto e interés con el que el tesista realizó su trabajo. Es perceptible su involucramiento intelectual en la problemática, así como una curiosidad matemática profunda para imaginar posibles extensiones o aplicaciones computacionales relacionadas a este problema.

4. La tesis del Sr. Zaragoza está escrita en forma clara y bien organizada. La tesis contiene resultados publicables en una revista especializada.

Esta tesis a nuestro juicio cumple con todos los requisitos que consideramos imprescindibles para una buena tesis de maestría. Tiene trabajo original, muestra la creatividad del tesista, da claros indicios de su comprensión matemática del tema, contagia al lector con la problemática. La tesis está tan bien escrita que puede ser leída por cualquier otro estudiante, profesor o investigador interesados en el tema.

Los abajo firmantes, integrantes de jurado para el examen de grado que sustentará la **Ing. Francisco Javier Zaragoza Martínez,** declaramos sque hemos revisado la tesis titulada: **"Coloraciones Mínimas de Matríces Intercaladas",** consideramos que cumple con los requisitos para obtener el grado de Maestro en Ciencias, con especialidad en Ingeniería Eléctrica.

Atentamente

Dr. Isidoro Gitler Goldwain ______________________

Dr. José Martínez Bernal ______________________

M. en C. Feliú Davino Sagols Troncoso ______________________

Dr. Guillermo Benito Morales Luna ______________________