

15630-B1
12915-1909



CINVESTAV-IPN
Biblioteca de Ingeniería Eléctrica



F80000013985

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección de Computación**



**Transformada- ΔY , Matrices Intercaladas y
Problema de Conocimiento Común**

Tesis presentada por el Ing. **Alejandro Flores Méndez** que para obtener el grado de **Maestro en Ciencias** dentro de la especialidad de **Ingeniería Eléctrica** con opción en **Computación**.

Trabajo dirigido por:

Director: **Dr. Isidoro Gitler** (CINVESTAV, Departamento de Matemáticas)
Co-director: **Dr. Feliú Sagols** (CINVESTAV, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Computación)

México, D. F.

Becario CONACYT 113888

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

M

CLASS.	
ADONS.	41-154-37
FROM:	26 x 100
PROCD.	1686 100
\$	

Agradecimientos:

A DIOS:

Por permitirme levantarme todos los días insatisfecho.

A MIS PADRES:

Por darme la vida al engendrarme, por procurarme una al educarme y por regalarme dos vidas, las suyas.

A MIS HERMANAS:

Pues continuamente me sirven de ejemplo, espero yo también serlo para ustedes y nunca defraudarlas.

A MI FAMILIA:

En particular a mis abuelitos, porque ustedes hicieron de mis papás lo que son.

A LA BANDA:

(Incluidos Lalo y Hugo) Porque han sido grandes amigos y mejores consejeros.

A ISIDORO Y FELIÚ:

Por mostrarme un nuevo mundo lleno de relaciones que se pueden encajar en distintas superficies.

A SOFI:

Porque sin tu trabajo (el de Anabel y el de Flor) sería bastante más pesada la vida de todos en la sección de computación.

AL CONACYT

Por apoyar la investigación

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

Resumen

Esta tesis presenta un nuevo algoritmo para la reducción de una gráfica con 3-terminales mediante la transformada- ΔY . Para la adecuada presentación de este algoritmo, la tesis incluye una breve introducción en el *Capítulo I*, donde se da un marco general respecto a la historia y los problemas asociados con el uso de la transformada; a continuación, el *Capítulo II* incluye algunos conceptos básicos relacionados con **teoría de gráficas** y el **encaje** de éstas en superficies. Como medio para representar los encajes de una gráfica se incluye una explicación sobre los **mapas combinatorios**, que son una estructura que permite describir el encaje de una gráfica sobre cualquier superficie.

Durante el *Capítulo III*, se muestran distintos algoritmos que han generado diversos avances concernientes a la reducción de gráficas mediante la **transformada- ΔY** hasta llegar al trabajo conocido como Reducción Delta Estrella (RDE); éste es particularmente importante para nosotros, por ser el sustento del algoritmo que se presenta aquí como resultado.

Finalmente, para resaltar la versatilidad del método se incluyen una serie de aplicaciones (en el *Apéndice C*) de entre las que destacan las **Matrices Intercaladas** (*Capítulo IV*) por ser en sí mismas objeto de estudio por los muchos problemas relacionados, tales como el problema de producto de sumas o el **problema de conocimiento común**.

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

Índice

I. INTRODUCCIÓN	1
II. PRELIMINARES MATEMÁTICOS	6
II.1. TEORÍA DE GRÁFICAS	6
II.2. ENCAJES DE GRÁFICAS	8
II.2.a. <i>Gráficas en superficies</i>	9
II.2.b. <i>Tipos de superficies</i>	12
II.2.c. <i>Caras, polígonos y superficies</i>	15
II.2.d. <i>La característica de Euler</i>	18
II.2.e. <i>Esquemas de rotaciones y matrices signadas</i>	19
II.3. MAPAS COMBINATORIOS	29
III. LA TRANSFORMADA-ΔY	32
III.1. SOBRE LA REDUCCIÓN DE GRÁFICAS MEDIANTE LA TRANSFORMADA- ΔY	34
III.1.a. <i>La prueba de Epifanov</i>	34
III.1.b. <i>Los lentes de Grünbaum</i>	35
III.1.c. <i>La prueba de Truemper</i>	36
III.1.d. <i>La prueba de Feo-Provan</i>	39
III.2. REDUCCIÓN PARA K TERMINALES	44
III.2.a. <i>La prueba de Gitler</i>	44
III.2.b. <i>Algoritmo de RDE modificado</i>	46
IV. MATRICES INTERCALADAS	58
IV.1. REFORMULACIÓN EN TEORÍA DE GRÁFICAS	58
IV.2. CONJETURA DE YUZVINSKY	60
IV.3. EL PROBLEMA DE CONOCIMIENTO COMÚN	65
V. CONCLUSIONES	67
APÉNDICE A	69
APÉNDICE B	70
APÉNDICE C	74
APÉNDICE D	80
REFERENCIAS	82

I. Introducción

Una serie de resultados en teoría de gráficas muestran que una clase de gráficas puede ser reducida a una forma canónica mediante la aplicación repetida de ciertas operaciones. Equivalentemente, esto demuestra que la aplicación inversa de estas mismas operaciones puede generar todas las gráficas en una clase. Por ejemplo, Tutte (Teorema IV58 en [Tu]) demostró que toda gráfica 3 -conexa puede ser generada a partir de una rueda mediante una secuencia en que se agreguen aristas y dividan vértices. Este tipo de caracterización es útil en pruebas inductivas.

Un grupo importante de reducciones son las llamadas **serie-paralelo**, las cuales junto con un par de transformadas que sustituyen una estrella de grado tres por un ciclo de longitud tres y viceversa conforman la transformada- ΔY .

Dos gráficas son **ΔY -equivalentes** si una de ellas puede transformarse mediante una secuencia de transformaciones $\Delta \rightarrow Y$ y $Y \rightarrow \Delta$ en una gráfica isomorfa a la otra. De forma similar, si una secuencia de transformadas- ΔY reduce una gráfica G a un solo vértice, se dice que G es **ΔY -reducible**. No toda gráfica es ΔY -reducible; por ejemplo, una gráfica simple con $\delta=4$ y cuyo ciclo de longitud mínima sea 4 claramente no admitirá reducciones o transformaciones.

Durante el S. XIX surge la transformada- ΔY como un desarrollo de ingeniería empleado para la simplificación y el análisis de circuitos electrónicos; en fechas más recientes, y en general después de la década de los 60's, han sido utilizadas en una gran variedad de problemas, tales como: la simplificación del análisis de redes eléctricas [SR], la solución del problema de Ising y sus muchos problemas de enumeración asociados [B], así como su uso para la solución del problema de la ruta más corta y de máximo flujo presentado por Akers [Ak] entre otros.

En este último artículo, además de las aplicaciones se presentaron un par de conjeturas importantes. Una de ellas planteaba que cualquier gráfica plana conexa y no dirigida con dos terminales podía ser ΔY -reducida a una sola arista entre éstas. Lehman por su parte [L] llegó a la misma conjetura cuando probó que las reducciones serie-paralelo preservan la confiabilidad en una red con dos terminales.

Esta conjetura fue posteriormente probada por Epifanov [Ep] en 1966 y, hacia 1967, Grünbaum [Gr] dio una prueba a una versión simplificada de la conjetura de Akers-Lehman, para la cual la gráfica no contaba con terminales.

Cerca de veinte años más tarde (1989), Truemper [T] ofreció una prueba alternativa mucho más simple que las dos anteriores. La prueba de Truemper hace uso del hecho de que cualquier gráfica plana es menor de una rejilla y por lo tanto puede ser encajada en ésta; una vez que se realiza dicho encaje se efectúa una serie de transformaciones de forma que reduce una columna y un renglón de la rejilla y por inducción se reduce a una sola arista entre los vértices terminales.

Para obtener la prueba, Truemper además probó que la clase de gráficas ΔY -reducibles es **cerrada bajo menores** (una clase de gráficas es cerrada bajo menores si para toda gráfica G que esté en la clase, cualquier gráfica H que sea menor de G está también en la clase) y puesto que las rejillas son ΔY -reducibles entonces todos sus menores también lo son, y en particular, las gráficas planas. Sobre esta misma tónica, Wagner conjeturó que cualquier clase de gráficas cerrada bajo menores \mathcal{F} puede ser caracterizada por un conjunto finito de **menores mínimos u obstáculos** \mathcal{H} ; un obstáculo es una gráfica $H \in \mathcal{H}$, con la propiedad de que cualquier menor G de H pertenece a \mathcal{F} . Por ejemplo, la clase de gráficas serie-paralelo es cerrada bajo menores y está caracterizada por la

exclusión K_4 como menor. La conjetura de Wagner fue probada por Robertson y Seymour [RS] en una admirable serie de artículos.

De lo anterior se concluye que existe un número finito de menores mínimos los cuales no son ΔY -reducibles. Entre estas gráficas se encuentra a K_6 (para la prueba se puede consultar el artículo de Warkentyne [W]) y a partir de esto se deduce que cualquier gráfica la cual es ΔY -equivalente a K_6 también es no- ΔY -reducible menor-mínima; existen siete de estas gráficas y se les llama la familia de Petersen puesto que la gráfica de Petersen está entre ellas; más ejemplos de gráficas no- ΔY -reducibles son $K_{5,5}$ (perfect matching) o una gráfica simple bipartita con 6 vértices en X , 8 en Y , con los vértices en Y de grado 3 y los de X de grado 4, más un vértice en X conectado a todos los vértices en Y ; de esta última es importante señalar que si bien no es ΔY -reducible aún no se sabe si es minimal.

De manera alternativa a la prueba de Truemper (en 1993), Feo y Provan [FP] presentaron una prueba en que se trabaja directamente sobre un encaje de la gráfica plana. A partir de ésta se obtiene una familia de conjuntos admisibles (Sección III.1.a) a través de un etiquetado, los cuales permiten la utilización de una serie de transformaciones modificadas que emplean tal etiquetado para la reducción de la gráfica.

Recientemente (1991) Gitler demostró que la clase de gráficas que no contienen a K_5 , así como la clase que no contiene a $K_{3,3}$ como menor son ΔY -reducibles [G1]. Archdeacon, Colbourn, Gitler y Provan [ACGP] caracterizaron las gráficas proyectivas reducibles. Además el mismo Gitler [G1, G2] fue capaz de probar otra conjetura de Akers [Ak] que expresaba que cualquier gráfica plana con 3 terminales es ΔY -reducible. Para su prueba emplea un método muy similar al de Truemper, ya que primero demuestra que cualquier gráfica plana puede ser encajada en una rejilla especial con 3 terminales a la que llama espejos perfectos (perfect mirrors) y

una vez encajados en estos es capaz mediante una serie ordenada de pasos de reducir el 'radio' de estos espejos.

En el transcurso de la presente tesis se analizará un nuevo algoritmo para la reducción de una gráfica con 3-terminales que aprovecha la idea del etiquetado propuesto por Feo y Provan [FP] de manera que se harán transformaciones restringidas por el valor de las aristas. La idea clave se basa en hallar los sitios en que la gráfica se bloquea debido a las terminales, o bien, a puntos que Feo y Provan llamaron **vértices expuestos** y sus obstrucciones asociadas. La idea fundamental radica en tratar de eliminar estas obstrucciones introduciendo nuevas transformaciones- ΔY etiquetadas de manera que un algoritmo similar al de Feo y Provan pueda trabajar en forma natural.

Cuando el problema se extiende para considerar gráficas que contienen 4 terminales, existen ejemplos de familias infinitas de gráficas planas con 4-terminales que no son ΔY -reducibles [Ak, FP, G1]. Sin embargo avances sobre caracterizaciones de gráficas con 4-terminales que sí pueden ser reducidas se presentan en [ACGP, G1, G2].

Por otra parte, es evidente que las transformadas- ΔY son capaces de cubrir una amplia gama de problemas; uno que es de particular interés para la presente tesis es el de **Matrices Intercaladas** (MI). Las MI se definen como aquellas matrices donde cada una de sus entradas es coloreada (etiquetada) de manera que no se repita un color por renglón o columna; además toda submatriz 2×2 contiene 2 ó 4 colores. Esta área por sí misma, ha sido objeto de un fuerte desarrollo tanto a nivel teórico como práctico [CGM1, CGM2, CGM3, Z]. Las MI a su vez permiten el estudio de un problema fuertemente ligado con el área de computación que es el de conocimiento común. El problema de conocimiento común es aquel en que un conjunto de entidades (procesadores, personas, etc.) necesitan adquirir conocimientos de forma 'justa'; es decir, si en cierto instante una entidad A adquiere una unidad de información

conocida por una entidad B , entonces en ese mismo instante B adquiere una unidad de información conocida por A .

II. Preliminares Matemáticos

II.1. Teoría de gráficas

En esta sección se incluyen los términos concernientes a teoría de gráficas que son de interés para la presente tesis. Esta sección se basa fundamentalmente en el texto de Bondy y Murty [BM], por lo que si el lector ya tiene cierta experiencia en el área puede omitir su lectura.

En primer lugar una **gráfica** G es una tripleta ordenada $(V(G), A(G), \psi_G)$ consistente de un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices**, un conjunto $A(G)$, disjunto a $V(G)$, de **aristas**, y una función de incidencia ψ_G que asocia a cada arista de $A(G)$ un par de vértices (no necesariamente distintos). La cardinalidad de los conjuntos de vértices y aristas son expresados a través de ν y α respectivamente. Cuando una gráfica está formada por un sólo vértice ($\nu=1$ y $\alpha=0$) a la gráfica se le llama **trivial**. Si a es una arista y u y v son vértices tales que $\psi_G(a)=uv$, entonces se dice que a une a u con v ; los vértices u y v son llamados los **extremos** de a . Si la dirección expresada por la función ψ_G no es necesaria (la arista uv es igual a vu), entonces esta relación se puede expresar simplemente con las aristas, denotando a cada arista a como (u,v) o uv ; además, una gráfica que cumpla con esta condición será una **gráfica no dirigida**.

Un punto importante concerniente a las gráficas es el que se refiere a las diversas formas de representar las relaciones que ésta presenta. Dos formas comunes para indicar tales relaciones son la **matriz de incidencias** y la **matriz de adyacencias**. La matriz de incidencias $(M(G)=[m_{ij}])$ corresponde a una matriz de dimensiones $\nu \times \alpha$ donde cada entrada m_{ij} es el número de veces (0, 1 ó 2) que v_i y e_j son incidentes. La matriz de adyacencias $(A(G)=[a_{ij}])$ en cambio, es una matriz de dimensiones

$U \times V$, con cada entrada a_{ij} siendo el número de aristas que unen a los vértices v_i y v_j .

Si una arista a es de la forma vv , entonces se le llamará **lazo**; por otra parte, si dos (o más) aristas unen el mismo par de extremos uv , entonces se les llamarán **aristas paralelas**. Una gráfica que carece de lazos o aristas paralelas es una **gráfica simple**. Si una gráfica es simple y para todo par de vértices distintos existe una arista, entonces se le conocerá como una **gráfica completa** y se le expresará como K_n . Una **gráfica bipartita** es aquella en que el conjunto de vértices puede ser particionado en dos subconjuntos X y Y , tales que cada arista tiene un extremo en X y el otro en Y ; si la gráfica es simple y une cada vértice de X con todos los vértices en Y , entonces la gráfica será una **gráfica bipartita completa**, y se le representará a través de $K_{n,m}$ con $n=|X|$ y $m=|Y|$. Una gráfica H será una **subgráfica** de G ($H \subseteq G$) si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Un **paseo** es una secuencia $v_0 a_1 v_1 \dots v_{k-1} a_k v_k$, tal que, para toda $1 \leq i \leq k$, a_i tiene como extremos a v_{i-1} y v_i . Los vértices $v_1 \dots v_{k-1}$ son llamados los **vértices internos**. Un **sendero** es un paseo donde todas las aristas son distintas entre si. Si en un sendero todos los vértices son distintos se le llamará **camino**. La longitud de un paseo, un sendero o un camino es el número de aristas (k) que lo conforman. Si para todo par de vértices en la gráfica existe al menos un camino W entre ellos, entonces se dice que la gráfica es **conexa**. Si existen al menos l caminos arista disjuntos entre cada par de vértices será una **gráfica l-conexa**. Una arista a será una **arista de corte** si G es conexa pero $G \setminus a$ no lo es. Cuando un sendero sea cerrado ($v_0 = v_k$) entonces se le llamará **ciclo**. El **diámetro** (girth) es la longitud k del ciclo más pequeño en la gráfica. Si una gráfica no contiene ciclos entonces se le llamará

¹ El resultado de la operación $A \setminus B$ se define como $\{x | x \in A, x \notin B\}$

acíclica; si además la gráfica es conexa entonces dicha gráfica será un **árbol**.

El **grado de un vértice** v ($d_G(v)$) es el número de veces que aparece v como un extremo de una arista (por lo tanto un lazo contribuye en dos al grado de un vértice). Cuando un vértice no contiene lazos y es incidente a k aristas diferentes entre si, se dice que forma una **k -estrella**. Una gráfica será **k -regular** cuando el grado de cada uno de sus vértices sea exactamente k .

Un **apareamiento** A , es un subconjunto de aristas de G tal que cada arista $a \in A$ no es un lazo y no existen dos aristas $a_1, a_2 \in A$ que sean adyacentes en G . Si además todo vértice en G es incidente a alguna arista de A entonces será un **apareamiento perfecto**.

Un punto importante para el manejo de gráficas son las operaciones que pueden ser realizadas con éstas; entre las operaciones más empleadas están la **contracción**, la **inserción**, y el **borrado** de aristas. El borrado de una arista consiste simplemente en eliminarla de la gráfica, la inserción permite relacionar un par de vértices a través de una nueva arista y por último la contracción es una operación que consiste en identificar los vértices extremos de una arista y después borrar ésta. Un último concepto importante que se debe conocer sobre teoría de gráficas es el de **menores**, una gráfica H será una menor de G si H puede ser construida mediante una serie de contracciones y borrados de las aristas de G .

II.2. Encajes de gráficas

La presente sección junto con la siguiente tienen por objetivo sentar las bases para poder encajar una gráfica sobre una superficie. La razón para incluir esta sección entonces es doble, por un lado se debe a que las operaciones que son estudio de la presente tesis (las transformadas- ΔY) hacen uso de caras (concepto que se definirá más adelante en esta sección) y vértices de un

grado determinado; y resulta que, para conocer el grado de una cara es indispensable que la gráfica se encuentre encajada. La segunda razón, no menos importante, se debe al hecho de se pretende incluir una herramienta que permita el uso de las transformadas en distintas superficies donde la gráfica pueda estar encajada.

II.2.a. Gráficas en superficies

En la presente tesis, como ya se adelantó, el interés por las superficies radica en el hecho de que se desea encajar las gráficas en éstas. Se dice que una gráfica está **encajada** cuando puede ser dibujada sin que las aristas se crucen (salvo en los vértices). El encaje de una gráfica siempre estará relacionado con una **superficie**, siendo ésta un *manifold* bidimensional; el estudio de las superficies y de las figuras geométricas dibujadas sobre éstas es llevado a cabo por la rama de las matemáticas conocida como **Topología**. Uno de los puntos más importantes respecto al estudio de las superficies es su capacidad para deformarse. La **deformación** de una superficie se puede explicar como la posibilidad de alterar la forma de la superficie (suponiendo que ésta es elástica), con la condición de que tal transformación no la rompa o rasgue. Cuando una superficie puede ser deformada en otra distinta se dice que ambas superficies son **homeomorfas**; un ejemplo de lo anterior serían un círculo y un rectángulo o una dona (toro) y una tasa como se muestra en la *Figura II-1*.

Una gráfica G encajada, divide la superficie en regiones conexas; adicionalmente, cuando la cerradura de cada una de estas



Figura II-1 Ejemplos de figuras **homeomorfas**: un rectángulo y un círculo, una tasa y una dona (un toro).

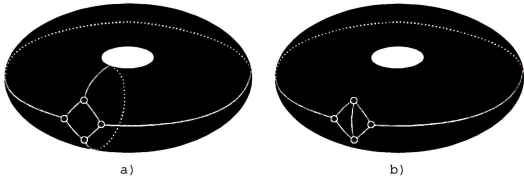


Figura II-2 Dos encajes distintos de K_4 en el toro; se puede observar como uno de los encajes (a) es 2-celular mientras que el otro (b) no lo es.

regiones sea homeomorfa a una 2-célula se le llamará **encaje 2-celular**, siendo una **2-célula** un homeomorfismo de un disco circular (una circunferencia y su interior). En la *Figura II-2* se muestran 2 encajes distintos de K_4 en el toro; la *Figura II-2.a* muestra un encaje 2-celular, mientras que la *Figura II-2.b* no lo es.

Si G tiene un encaje 2-celular entonces a las cerraduras de estas regiones se les conoce como las **caras** de G y se les representará como $C(G)$. En la *Figura II-3* se muestra un encaje de una gráfica con 4 caras. Una cara c puede entonces ser descrita mediante un paseo cerrado, de forma que el **grado de una cara c** ($d_G(c)$) corresponde al número de aristas en el paseo que describe a la cara. En la *Figura II-3*, $d_G(c_1)=6$, $d_G(c_2)=11$, $d_G(c_3)=4$ y

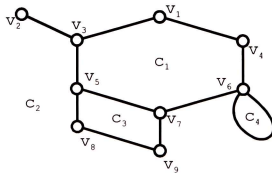


Figura II-3 Representación de una gráfica plana con 11 aristas, 4 caras y 9 vértices.

$$d_G(c_4)=1.$$

Una gráfica auxiliar, conocida como la **gráfica dual**, G^* , puede ser construida a partir de una gráfica 2-celular G , a la que se llamará **primal**. La gráfica dual G^* contiene un vértice c^* y una arista a^* que corresponden a cada cara c y cada arista a en G respectivamente. Una arista a^* unirá un par de vértices c^* y d^* si y sólo si sus caras correspondientes c y d están separadas por una arista a . Un ejemplo de una gráfica primal G y su dual se muestran en la *Figura II-4*. Es importante aquí simplemente hacer notar que un vértice de grado uno y un lazo, un vértice de grado 2 y una cara de grado 2 (dos aristas en paralelo), y una 3-estrella y una cara de grado 3 (también conocida como delta) son equivalencias entre una gráfica primal y su dual tal y como se puede comprobar al observar la *Figura II-4*.

Ahora bien, para poder llevar a cabo un estudio detallado de una gráfica encajada G es preciso contar con herramientas que permitan describir no sólo a la gráfica encajada sino la superficie en que se encuentra. Con este propósito se ha empleado lo que se conoce como **polígonos de r -lados**, los cuales no son sino una circunferencia dividida por r vértices y la cara delimitada por éste. La forma de representar tanto una superficie como una gráfica encajada por medio de polígonos se explicará más adelante.

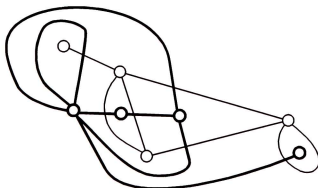


Figura II-4 Una gráfica primal y su dual.

II.2.b. Tipos de superficies

Existen dos tipos de superficies llamadas orientables y no orientables, ejemplos de éstas se muestran en la *Figura II-5*. Las superficies **orientables** son todas aquellas en que siempre es posible recorrer una trayectoria conservando la orientación original; en otras palabras, siempre se conservará la derecha y la izquierda en el recorrido. Estas superficies se obtienen agregando asas (toros) a la esfera para formar un toro, un 2-toro o un k -toro.

En cambio, en una superficie **no orientable** no siempre se puede conservar la orientación con la que se inicia una trayectoria; es decir, se puede encontrar una trayectoria en donde

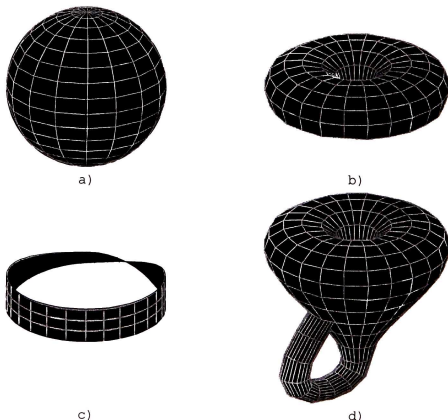


Figura II-5 Representación tridimensional de dos superficies orientables: (a) una esfera y (b) un toro; y dos no orientables: (c) una banda de Möbius y (d) una botella de Klein.

lo que originalmente era derecha pase ahora a ser izquierda y viceversa. La forma de crear estas superficies es agregando bandas de M6bius a la esfera, las cuales gracias a los torcimientos que inducen al cruzarlas, provocan estos cambios de sentido.

Si es posible encajar una gr1fica en una superficie particular entonces la gr1fica puede ser llamada con el nombre de 6sta; por ejemplo, una gr1fica **plana** ser1 aquella que pueda ser encajada en la esfera (en el plano).

Como ya fue adelantado, una superficie puede ser descrita por medio de pol6gonos. Estos pol6gonos deber1n cumplir con la condici6n de que cada lado deber1 aparecer dos veces, adem1s de que tendr1 asociado un sentido. Estos dos datos no son sino 'instrucciones de pegado', ya que cada par de lados con etiquetas id6nticas se unir1n de tal forma, que el sentido que tengan asociado coincida. Este proceso es ejemplificado en la *Figura II-6*.

Una forma cl1sica para describir tales pol6gonos sin necesidad de su representaci6n gr1fica, es la que se obtiene de viajar alrededor del per6metro del pol6gono en alg6n sentido arbitrario. Este sentido se conservar1 hasta que se finalice el trayecto, es decir, hasta que se regrese al punto donde se inici6 6ste; durante el trayecto se indicar1 el orden en que aparecieron

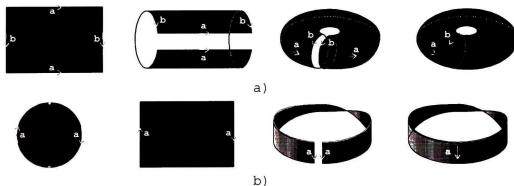


Figura II-6 Ilustraci6n que muestra el pol6gono equivalente y la forma de unirlo para (a) un toro y (b) una banda de M6bius.

los lados; además, se hará alusión a si la dirección coincidía o no con el sentido elegido para la trayectoria, indicando como u^{-1} un lado (arista) que fue transitado en contra de su sentido. Con esto en mente y tomando como punto de partida la *Figura II-6.a*, se puede asumir que se inicia el trayecto en la esquina superior izquierda en el sentido indicado por el lado a , el resultado entonces sería de la forma:

$$aba^{-1}b^{-1} \quad (\text{Ec. II-1})$$

Este resultado particular corresponde a lo que se conoce como una **forma canónica**, que para este caso es la representación del toro; y ya que un k -toro no es mas que k toros unidos, el polígono que lo representaría sería de la forma:

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1} \quad (\text{Ec. II-2})$$

En forma similar, de la *Figura II-6.b* se puede obtener un polígono que represente a la banda de Möbius, con la forma:

$$aa \quad (\text{Ec. II-3})$$

Esto es la forma canónica de una banda de Möbius, y análogo a un k -toro, una superficie no orientable con l bandas de Möbius sería de la forma:

$$a_1a_1a_2a_2\dots a_la_l \quad (\text{Ec. II-4})$$

Algo que es preciso aquí señalar es que puesto que las aristas del polígono representan bordes en que la superficie fue 'cortada', es necesario que toda trayectoria que emplee uno de estos bordes salga en el punto correcto en el borde opuesto, tal y como se puede observar en la *Figura II-7*; expresado esto mismo con otras palabras, el orden de aparición de un conjunto de trayectorias con respecto al sentido del lado deberá de mantenerse.

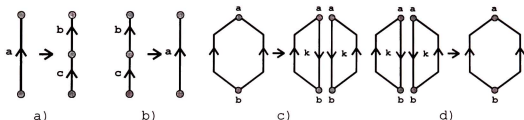


Figura II-8 Figura conteniendo los resultados de las cuatro operaciones básicas de cirugía: (a) subdivisión de dimensión uno, (b) composición de dimensión uno, (c) subdivisión de dimensión dos y (d) composición de dimensión dos.

polígonos se le conoce como **poliedro**. La trascendencia de este hecho radica en que es posible hacer que el perímetro de un poliedro coincida con una de las formas canónicas de un polígono para una superficie; a este proceso se le conoce como **normalización**.

Para poder llevar a cabo la normalización se requieren cuatro operaciones elementales cuya aplicación se conoce como **cirugía**; estas operaciones (mostradas en la *Figura II-8*) son:

- **Subdivisión de dimensión uno (S_1):** Una arista a del poliedro se divide en dos nuevas aristas b y c y se toma un punto interno de a como vértice adicional.
- **Composición de dimensión uno (C_1):** En este caso, dos aristas sucesivas ab se reemplazan por una nueva arista c , desapareciendo el vértice entre a y b .
- **Subdivisión de dimensión dos (S_2):** Dos vértices de un polígono en el poliedro serán conectados por una nueva arista k dividiendo el polígono en dos nuevos polígonos.
- **Composición de dimensión dos (C_2):** Dos polígonos con una arista en común se convertirán en un único polígono al identificar dicha arista en ambos polígonos.

Además de las operaciones elementales de la cirugía, una observación simple que se debe tomar en cuenta, es que en caso de

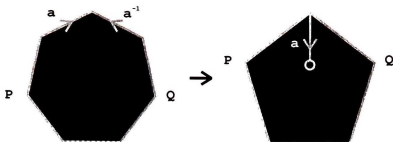


Figura II-9 Resultado de una normalización simple sobre un polígono

que un poliedro sea de la forma $Paa^{-1}Q$, con P y Q siendo cualquier secuencia de aristas con sentidos arbitrarios estos pueden ser sustituidos por:

$$Paa^{-1}Q \rightarrow PQ \quad (\text{Ec. II-5})$$

Esta operación se indica en la *Figura II-9* y se conoce como **normalización simple**.

Por otra parte, dado que la normalización consiste en realizar una cirugía, es factible demostrar que para el caso orientable, la **normalización de un toro** o una asa para un polígono de la forma $PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T$, con P , Q , R , S y T siendo cualquier secuencia de aristas (incluso una secuencia nula), resultaría en:

$$PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T \rightarrow PSRQTaba^{-1}b^{-1} \quad (\text{Ec. II-6})$$

Un proceso similar es definido para una superficie no orientable, en este caso lo que se realiza es una **normalización de una banda de Möbius**, que se efectúa sobre un polígono de la forma $PcQcR$, con P , Q y R representando cualquier secuencia de aristas; esta normalización permite generar la siguiente modificación:

$$PcQcR \rightarrow PQ^{-1}Rcc \quad (\text{Ec. II-7})$$

Nótese que si una secuencia $S=ab\dots z$ entonces $S^{-1}=z^{-1}\dots b^{-1}a^{-1}$.

Por último, en ocasiones es posible encontrar que el perímetro de un polígono está conformado tanto por toros como por bandas de Möbius. Para evitar que se tenga una superficie 'mezclada' es posible **transformar una asa en dos bandas de Möbius**;

la transformación actúa sobre una secuencia de la forma $Rccaba^{-1}b^{-1}$ con R representando cualquier secuencia de aristas, el resultado de esta transformación será:

$$Rccaba^{-1}b^{-1} \rightarrow Rccaabb \quad (\text{Ec. II-8})$$

Lo anterior permite afirmar que, dado cualquier conjunto de polígonos que representen las caras de una gráfica 2-celular, es posible no sólo unirlos para formar un poliedro; sino que además, tal poliedro corresponderá a alguna superficie (orientable o no) cuyo tipo podrá ser determinado exclusivamente de la 'lectura' de las etiquetas en el perímetro del poliedro.

II.2.d. La característica de Euler

Un resultado importante en Topología se debe a Euler. Gracias a su trabajo, se puede obtener más información sobre la superficie en que está encajada una gráfica siempre que se cuente con el número de aristas, caras y vértices que la componen. Sea $\alpha = |A(G)|$, $\kappa = |C(G)|$, $\nu = |V(G)|$ y S una superficie; la característica de Euler para una superficie ($E(S)$) se define entonces como:

$$E(S) = -\alpha + \kappa + \nu \quad (\text{Ec. II-9})$$

De lo anterior se desprende que cada que se analice una superficie orientable se obtendrá como resultado:

$$2 - 2p = -\alpha + \kappa + \nu \quad (\text{Ec. II-10})$$

donde p se refiere al número de toros en la superficie; por ejemplo, la característica de Euler para un 2-toro sería igual a -2 . Por su parte, para una superficie no orientable la característica de Euler resultará de:

$$2 - q = -\alpha + \kappa + \nu \quad (\text{Ec. II-11})$$

siendo q el número de bandas de Möbius que se encuentran en la superficie. Es claro del análisis de la característica de Euler, que esta no hace posible la distinción entre un toro y dos bandas de Möbius, o en general entre un k -toro y $2k$ bandas de Möbius. Esto

último resulta interesante ya que se pudo comprobar mediante la cirugía que efectivamente un toro es equivalente a dos bandas de Möbius.

II.2.e. Esquemas de rotaciones y matrices signadas

Hasta el momento, se han definido diversos conceptos concernientes al encaje de gráficas en una superficie, y sin embargo, aún no se especifica ningún procedimiento que permita llevar a cabo tal encaje. Un método sencillo que permite generar las caras de un encaje para gráficas 2-celulares es el esquema de rotaciones. Vislumbrados por Heffter (1891) y desarrollados ampliamente por Edmonds (1960) [E], los esquemas de rotaciones se aprovechan de la observación elemental de que cualquier gráfica G encajada en una superficie permite definir para cada vértice v una permutación cíclica, π_v , que indicará el orden de aparición de las aristas (o los vértices suponiendo que G es simple) adyacentes a v para un sentido determinado (a favor o en contra de las manecillas del reloj), siendo la elección de este sentido arbitraria. En la presente sección se asumirá que G es simple, aunque esta consideración es sólo para facilitar la explicación. Por ejemplo, si se considera al vértice v_0 para la *Figura II-10*, y se asume que el sentido que se desea emplear es el contrario a las manecillas del reloj, entonces la permutación de los vértices con respecto a v_0 será $\pi_{v_0} = (v_3, v_2, v_1)$. Esta misma notación se puede extender de forma que se refiera al siguiente vértice adyacente a v (x) a partir de u ; o bien, presentado como fórmula general:

$$x = \pi_v(u) \quad (\text{Ec. II-12})$$

Nuevamente para el ejemplo de la *Figura II-10*, esto querría decir que $v_3 = \pi_{v_0}(v_1)$ o $v_1 = \pi_{v_0}(v_2)$.

La importancia de las permutaciones radica en el hecho de que éstas implican como están definidas las caras, y por lo tanto, se puede construir el conjunto de polígonos (caras) P del que se

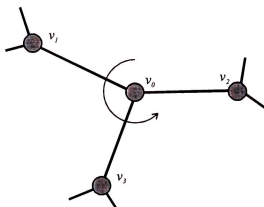


Figura II-10 La permutación de un vértice (para este caso v_0) se define eligiendo un sentido (en este caso contrario a las manecillas del reloj) e indicando el orden en que 'aparecen' los vértices (v_3, v_2 y v_1).

habló en la Sección II.2.c tomando sólo estas permutaciones como base.

Para mostrar como una rotación fija una cara observe la Figura II-11, suponiendo que se inicia un paseo con la arista que une los vértices v_0 y v_1 , en esa misma dirección (de v_0 a v_1), entonces el esquema de rotaciones existente en este vértice indica que la siguiente arista (o vértice) en la cara sería la que lleva a v_2 ($v_2 = \pi_{v_1}(v_0)$). Este proceso se puede continuar hasta llegar al vértice v_6 , donde finalmente se indicaría que el siguiente vértice

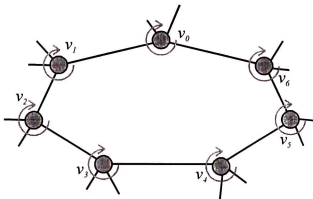


Figura II-11 Representación gráfica de una cara con los sentidos asociados a cada vértice en la cara

en su permutación considerando que se viene desde el vértice v_5 es v_0 ($v_0 = \pi_{v_5}(v_5)$); y de este último resulta que $v_1 = \pi_{v_0}(v_0)$, o en otras palabras, que se cerró el paseo (la cara).

En general el proceso para obtener el polígono asociado a una cara consiste en elegir una arista $a = u_0 u_1$ perteneciente a dicha cara en algún sentido (por ejemplo de u_0 a u_1); en segundo lugar se obtiene el siguiente vértice a partir de los datos con que se cuenta ($u_2 = \pi_{u_1}(u_0)$); se continuará obteniendo un nuevo vértice ($u_{i+1} = \pi_{u_i}(u_{i-1})$) hasta que el último par de vértices corresponda con la pareja inicial (u_{i+1} y u_i sean idénticos a u_1 y u_0 respectivamente); es decir, hasta que se cierre la cara. Puesto que cualquier arista en la gráfica puede ser 'transitada' en sólo dos sentidos (de u a v y de v a u), entonces lo único que restaría por hacer es marcar el sentido en que ya se ha transitado cada arista. Finalmente, si un sentido para una arista no ha sido empleado se deberá generar un nuevo polígono con esta arista y sentido, repitiendo este último paso hasta que se agoten todas las aristas en ambos sentidos. El conjunto de polígonos resultante será el conjunto de polígonos P que tanto se ha mencionado.

Para demostrar que efectivamente el esquema de rotaciones es suficiente considere la gráfica que se muestra en la *Figura II-12* ($K_{3,3}$ con un esquema de rotaciones fijo).

Antes de continuar con el ejemplo es importante resaltar que $K_{3,3}$ es una gráfica no-plana, o en otras palabras, es imposible dibujarla en el plano sin que al menos dos aristas se crucen en un punto distinto a un vértice.

De acuerdo a la *Figura II-12* las permutaciones de los vértices serían las que se indican en la *Tabla II-1*. La forma de obtener las caras es, como ya se mencionó, generar los polígonos asociados a cada una de ellas, esto se realiza eligiendo alguna arista y sentido al azar. Suponiendo que se inicia con la arista $(0,1)$ en ese sentido, la cara que se formará sería:

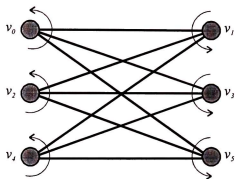


Figura II-12 Esquema de rotaciones para una gráfica $K_{3,3}$.

cara	borde
1	$(0,1), (1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (3,0)$

Para poder controlar mejor lo que se halla realizado se irá presentando una matriz con las 9 aristas de la gráfica y los dos sentidos en que puede ser transitada cada arista. En la matriz se marcará el primer renglón de cada arista (u,v) si esta fue transitada en el sentido indicado en la columna $((u,v)$ representa el sentido de u a v) y el segundo renglón si fue en transitada en sentido inverso $(u,v)^{-1}$. Por lo tanto la matriz con los datos de esta primera cara luciría como:

$(0,1)$	$(0,3)$	$(0,5)$	$(2,1)$	$(2,3)$	$(2,5)$	$(4,1)$	$(4,3)$	$(4,5)$
+					+		+	
	-		-					-

Ahora que se cuenta con la primera cara, es posible continuar el proceso con la arista $(0,1)^{-1}$, de tal forma que la cara dos

Vértice	Permutación
0	5, 3, 1
1	0, 2, 4
2	5, 3, 1
3	0, 2, 4
4	5, 3, 1
5	0, 2, 4

Tabla II-1 Tabla de las permutaciones de la Figura II-12.

será:

cara	borde
1	(0,1), (1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (3,0)
2	(1,0), (0,5), (5,2), (2,3), (3,4), (4,1)

Una vez más, la matriz con los sentidos se modificaría de modo que ahora se podrían observar los siguientes valores:

(0,1)	(0,3)	(0,5)	(2,1)	(2,3)	(2,5)	(4,1)	(4,3)	(4,5)
+		+		+	+	+	+	
-	-		-		-		-	-

Prosiguiendo con el proceso es posible verificar que finalmente el conjunto de caras estará formado por:

cara	borde
1	(0,1), (1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (3,0)
2	(1,0), (0,5), (5,2), (2,3), (3,4), (4,1)
3	(0,3), (3,2), (2,1), (1,4), (4,5), (5,0)

Además resulta que esta tercera cara agotó las posibilidades que restaban por considerar. El algoritmo entonces arrojó por resultado que la gráfica cuenta con tres caras de grado 6, estas caras se muestran en la *Figura II-13*.

Solamente resta entonces 'pegar' las caras; en la *Figura II-13.b* se unieron las tres caras mediante dos composiciones de dimensión 2 (*Sección II.2.c*); sin embargo, restan por conocer datos importantes concernientes a la gráfica como en que superficie se encuentra encajada. De la *Sección II.2.d*, rápidamente se puede conocer que la característica de Euler para la superficie es igual a 0 $(-9+3+6)$ y por lo tanto la gráfica podría ser un toro o 2 bandas de Möbius; así que para verificar a que superficie pertenece se pueden observar los elementos que se encuentran en la frontera o perímetro, obteniendo como resultado el siguiente:

$$((4,3), (3,0), (0,3), (3,2), (2,1), (1,4), (4,5), (5,2), (2,3), (3,4), (4,1), (1,2), (2,5), (5,4)) \quad (\text{Ec. II-13})$$

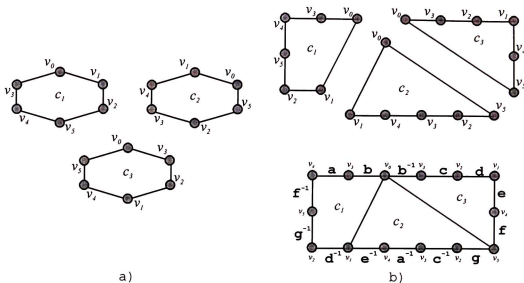


Figura II-13 (a) Caras para $K_{3,3}$ obtenidas del esquema de rotaciones presentado en la Figura II-12 y (b) proceso para 'pegar' (composición de dimensión 2) caras.

para hacer más manejable la ecuación se pueden sustituir las aristas por una variable de forma que la ecuación luzca como:

$$abb^{-1}cdefgc^{-1}a^{-1}e^{-1}d^{-1}g^{-1}f^{-1} \quad (\text{Ec. II-14})$$

El primer paso que se puede realizar es una normalización de grado 1 en la arista b , tal que la Ec. II-14 luce ahora como:

$$acdefgc^{-1}a^{-1}e^{-1}d^{-1}g^{-1}f^{-1} \quad (\text{Ec. II-15})$$

No es difícil comprobar que si se aplica la normalización para el caso orientable esta nueva ecuación se puede llevar a la forma:

$$e^{-1}efg^{-1}c^{-1}cg^{-1}f^{-1}aca^{-1}c^{-1} \quad (\text{Ec. II-16})$$

y de esta ecuación es evidente que el resultado (tras utilizar la normalización simple una serie de veces) corresponde al valor de la forma canónica del toro.

Hay un detalle importante; si bien se realizó la prueba de normalización para conocer la superficie sobre la que se encuentra la gráfica, ésta en realidad no era necesaria y se presenta

sobretudo para que el lector ratifique que la gráfica se encajó en un toro.

La razón por la que dicha prueba no era necesaria se debe a que, como ya fue señalado en las Secciones II.2.a y II.2.c, para que una gráfica se encuentre en una superficie no-orientable deberá de incluir una o más bandas de Möbius, dichas bandas provocaran torcimientos y los esquemas de rotaciones *per se* no son capaces de representar estas estructuras.

Un medio que ha sido empleado para integrar la idea de torcimientos fue presentado por Stahl [S]. En su trabajo, Stahl introduce el concepto de **matrices signadas**, que no son sino indicadores de las aristas que se torcieron como consecuencia de una banda de Möbius. Las matrices signadas en conjunto con los esquemas de rotaciones son empleadas para generar el encaje de una gráfica a partir de una representación más simple (por ejemplo la matriz de incidencias) en una superficie de cualquier tipo y son en realidad, una generalización del esquema de rotaciones, es precisamente por esta razón que Stahl decidió llamarlos **esquema generalizado de encajes**.

La idea continúa siendo la de generar las caras al ir las recorriendo de acuerdo al esquema de rotaciones; sin embargo, para este caso se debe de tomar en cuenta una variable de signo a la que simplemente se le llamará 'signo'. El signo se referirá al sentido que debe ser considerado para la rotación, mientras que el signo positivo mantiene el sentido como ha sido definido para cada vértice, el negativo señala que se debe de considerar el sentido inverso al preestablecido. Suponiendo entonces que se tiene una secuencia de vértices u_0, u_1, \dots, u_n que representan la permutación cíclica de vértices adyacentes a v , se debe modificar la ecuación de la permutación (Ec. II-12) como sigue:

(Ec. II-17)

En esta modificación la variable s representa el signo; al iniciar un paseo para generar una cara se asumirá que el signo es positivo y después el signo del trayecto dependerá del valor de las aristas que se encuentren en éste (sólo se alterará el signo al atravesar una 'arista negativa'); pero además, se debe asumir que una arista (u) transitada mientras el signo es negativo ($(x,y)-$) fue transitada en sentido inverso (u^{-1}). Por último, Stahl introdujo un concepto llamado λ -trivial; el concepto de λ -trivial se refiere a un ciclo donde el número de aristas con signo negativo es par. Una gráfica será orientable si todas las caras son λ -trivial y será no-orientable en caso contrario.

Para clarificar un poco más los conceptos anteriores considere la gráfica de la *Figura II-14*. Esta gráfica es idéntica a la de la *Figura II-12* con la salvedad de que la arista $(0,1)$ es negativa.

Las rotaciones para esta nueva gráfica también permanecieron constantes (ver *Tabla II-1*); sin embargo surgen diferencias al construir las caras de su encaje como consecuencia de la arista negativa. Una vez más se partirá con la arista $(0,1)$, de forma que la cara resultante sería:

Cara	Borde
1	$(0,1)-, (1,4)-, (4,3)-, (3,2)-, (2,5)-, (5,0)-, (0,1)+, (1,2)+, (2,5)+, (5,4)+, (4,3)+, (3,0)+$

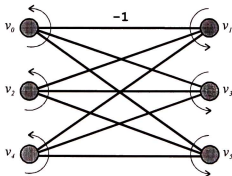


Figura II-14 Esquema de rotaciones para una gráfica $K_{3,3}$ signada

Las diferencias entre esta gráfica signada y la anterior resaltan inmediatamente, ya que como consecuencia del signo en la arista $(0,1)$ se formó una cara completamente diferente a la cara 1 de la gráfica en un toro. Se debe notar que la primera arista en la cara está indicada como $(0,1)-$; la arista se debe marcar en esta forma porque a pesar de que se inició con el signo positivo, este cambió inmediatamente ya que la arista es negativa; por otra parte, la arista $(0,1)-$ indica que en realidad se ha empleado la arista $(0,1)^{-1}$ o $(1,0)$ y por lo tanto la cara no se debe cerrar cuando se llega a la arista $(1,0)+$. Sumado a todos estos datos se puede observar que la cara no es λ -trivial y por lo tanto se puede deducir de inmediato que la gráfica no será orientable. En la matriz auxiliar con las aristas y sentidos empleados se encontrarían los siguientes datos:

$(0,1)$	$(0,3)$	$(0,5)$	$(2,1)$	$(2,3)$	$(2,5)$	$(4,1)$	$(4,3)$	$(4,5)$
+		+		+	+	+	+	
-	-		-		-		-	-

Al continuar el proceso con la arista $(0,3)$ se obtendría que:

Cara	Borde
1	$(0,1)-, (1,4)-, (4,3)-, (3,2)-, (2,5)-, (5,0)-, (0,1)+,$ $(1,2)+, (2,5)+, (5,4)+, (4,3)+, (3,0)+$
2	$(0,3)+, (3,2)+, (2,1)+, (1,4)+, (4,5)+, (5,0)+$

La característica de Euler para esta gráfica tiene un valor de -1 ($-9+2+6$) y de inmediato se puede conocer entonces que la gráfica está encajada en tres bandas de Möbius; simplemente como ejercicio se puede obtener de la normalización del perímetro del poliedro formado por las caras del polígono (Figura II-15) el cual tiene la siguiente frontera:

$$abcdefabgfhd eg^{-1}ch^{-1} \quad (\text{Ec. II-18})$$

Una vez más, aplicando las reglas de normalización, se puede comprobar que los siguientes polígonos son equivalentes:

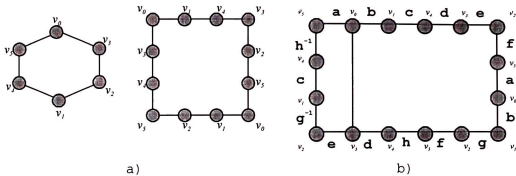


Figura II-15 (a) Polígonos de las caras correspondientes de $K_{3,3}$ y (b) ambos polígonos pegados.

$$\begin{aligned}
 & abcdefabghfhdg^{-1}ch^{-1} \\
 = & abch^{-1}f^{-1}g^{-1}b^{-1}a^{-1}f^{-1}e^{-1}eg^{-1}ch^{-1}dd \\
 & = abgfabghh^{-1}dccc \quad (\text{Ec. II-19}) \\
 = & f^{-1}g^{-1}b^{-1}bgfaaddcc \\
 & = aaddcc
 \end{aligned}$$

lo cual evidentemente corresponde con el perímetro de tres bandas de Möbius.

Aunque no fue tratado aquí, el método en realidad no presenta ninguna dificultad al extenderse a gráficas que no sean simples (consideración realizada al principio de la explicación); sin embargo, el tratar de evitar la condición de que el encaje de la gráfica sea 2-celular simple y sencillamente no se puede evitar porque el método se rige sobre la idea de formar un paseo cerrado para cada cara. El método, por lo tanto, el método no puede ser extendido a una gráfica no-conexa porque estrictamente hablando no es posible saber que cara comparten los componentes conexos de la gráfica, además de que aún cuando este dato se conociera existirían restricciones fuertes en cuanto a definir el perímetro del poliedro que sirve para analizar en que superficie fue encajada la gráfica.

II.3. Mapas combinatorios

Tras todos estos avances en cuanto a la representación de una gráfica y como generar un posible encaje de ésta, a partir de una representación simple, tal como puede ser la matriz de incidencias o de adyacencias, solamente resta entonces por definir alguna estructura que permita su utilización en las computadoras. Un medio que permite su empleo de forma muy natural mediante las computadoras es el conocido como **Mapas Combinatorios**. Los mapas combinatorios realizan un análisis que toma en cuenta las aristas, caras y vértices para describir completamente una gráfica encajada en cualquier superficie.

Los elementos básicos de representación de una gráfica mediante un mapa combinatorio son conocidos como **cruces**. Cada arista de la gráfica tendrá cuatro cruces asociadas que no son más que el resultado de las posibles combinaciones que existen entre la arista, sus vértices extremos y las caras que la 'rodean'; tal y como se muestra en la *Figura II-16*; estas mismas cruces se mantienen aún cuando v_1 y v_2 o c_1 y c_2 no sean diferentes.

El mapa combinatorio cuenta además con tres operaciones básicas: ϕ , θ y π que permiten 'viajar' sobre una gráfica encajada tomando en cuenta cualquier cruz inicial en esta. A continuación

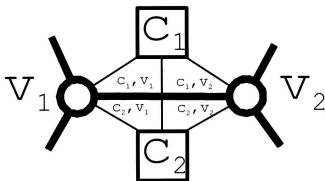


Figura II-16 Una arista $a=v_1v_2$ puede ser dividida en cuatro porciones correspondientes a las combinaciones entre las caras y los vértices relacionados con ésta. Cada una de éstas es una **cruz** de a .

se describe brevemente su funcionamiento siempre considerando que se encuentra en una cruz $cz = \{a, c_1, v_1\}$.

φ : Deja la arista y la cara fijas y cambia de vértice; es decir viaja al extremo opuesto en la arista. La operación se expresa como $\varphi(cz) = \{a, c_1, v_2\}$.

θ : Deja la arista y el vértice fijos y cambia de cara. La forma de definirla es a través de $\theta(cz) = \{a, c_2, v_1\}$.

π : Deja la cara y el vértice fijos y cambia de arista. Esta última operación se define como $\pi(cz) = \{a', c_1, v_1\}$, para una gráfica encajada es evidente entonces que sólo puede existir una arista a' que cumpla esta condición.

Estas tres operaciones (mostradas en la *Figura II-17*), y en general, sus posibles combinaciones hacen posible ir de cualquier cruz inicial a una final (siempre y cuando la gráfica sea conexa).

Un punto que se debe hacer notar es que las operaciones φ y θ son equivalentes en el dual; es decir, el resultado de la

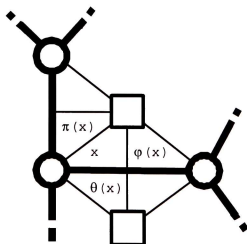


Figura II-17 Resultado de las operaciones básicas φ , θ y π sobre una cruz inicial x .

operación ϕ en la gráfica primal es igual al resultado de θ en la dual y viceversa.

Las operaciones del mapa combinatorio no tienen porque restringirse a ϕ , θ y π , y en general se pueden hacer composiciones de éstas para llevar a cabo las operaciones básicas requeridas en gráficas tales como borrado, contracción e inserción de aristas, así como división de vértices. Una biblioteca (mapc) que permite el empleo de los mapas combinatorios fue desarrollado en el transcurso de la presente tesis; en el *Apéndice B* se incluye una breve explicación sobre las estructuras y funciones incluidas en ésta.

III. La Transformada- ΔY

Uno de los conjuntos más importantes de reducciones empleadas en teoría de gráficas son las **reducciones serie-paralelo**. Estas se aplican a gráficas que pueden incluir lazos y aristas en paralelo. Las cuatro reducciones son:

- (R0) **Reducción de lazos**: cualquier lazo puede ser borrado de G .
- (R1) **Reducción de grado uno**: borra un vértice de grado uno y su arista incidente
- (R2) **Reducción en serie**: borra un vértice de grado dos y , y sus dos aristas incidentes xy y yz , y agrega una nueva arista xz .
- (R3) **Reducción en paralelo**: si existen dos (o más) aristas en paralelo elige una de estas y la elimina.

Cada una de estas reducciones decrementa el número de aristas en la gráfica. Una gráfica conexa es **serie-paralelo-reducible** si puede ser reducida a un solo vértice por una secuencia de estas operaciones.

Otras dos transformaciones de gráficas son importantes y hacen uso de una estrella (al menos) de grado 3 (Y) y de un ciclo de longitud 3 (Δ). Las transformaciones son:

- (T0) **Transformación estrella-delta ($Y-\Delta$)**: Sustituye las aristas wx , wy , y wz y el vértice w de una estrella por una delta xy , yz , y zx .
- (T1) **Transformación delta-estrella ($\Delta-Y$)**: Borra las aristas xy , yz , y zx que forman una delta, y agrega un nuevo vértice w y tres aristas wx , wy , y wz .

La transformada delta-estrella o ΔY (Figura III-1), es un total de seis operaciones, cuatro por las reducciones serie-paralelo y dos más de las transformaciones delta-estrella y estrella-delta ($T1$ y $T0$). Es importante aclarar que, por lo general, la transformada- ΔY toma en cuenta las siguientes consideraciones: para llevar a cabo una reducción en paralelo ($R3$) o una transformada delta-estrella ($T1$) las aristas involucradas en la operación deberán compartir una cara; y por último, la transformada $Y-\Delta$ operará estrictamente sobre una 3-estrella.

En la Figura III-1 aparece un vértice marcado como u para tres de las operaciones, este vértice es importante porque en caso de que corresponda a un vértice terminal, la operación no puede ser llevada a cabo. Esta es la distinción de los vértices

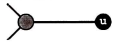



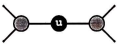
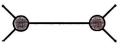

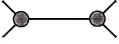
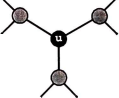
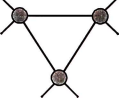
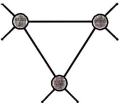
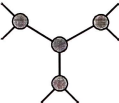
Reducción/Transformación	Aplica sobre:	Resultado:
<i>Reducción de grado uno (R0)</i>		
<i>Reducción de lazos (R1)</i>		
<i>Reducción en serie (R2)</i>		
<i>Reducción en paralelo (R3)</i>		
<i>Transformación Y-Δ (T0)</i>		
<i>Transformación Δ-Y (T1)</i>		

Figura III-1 Operaciones de la Transformada- ΔY .

terminales. Los vértices terminales son privilegiados en el sentido de que no deben ser tocados ("eliminados, movidos, etc.") al llevar a cabo una operación.

III.1. Sobre la reducción de gráficas mediante la Transformada- ΔY

Como ya fue adelantado, la transformada- ΔY ha sido fundamentalmente desarrollada desde alrededor del año 1960, tomando en cuenta sobre todo los trabajos de Akers y Lehman [Ak, L] entre otros. Los intentos por reducir gráficas ayudados de la transformada- ΔY arrancan a partir de la conjetura a que llegaron estos dos últimos de forma independiente y en que describían que una gráfica planar no dirigida con dos terminales podría ser ΔY -reducible a una sola arista entre las dos terminales.

III.1.a. La prueba de Epifanov

La primera prueba de la conjetura de Akers y Lehman se dio a conocer en 1966 con el trabajo de Epifanov [Ep]. En su trabajo, Epifanov consideraba una gráfica G sin lazos, 2-conexa, encajada en la esfera. Para su reducción hacía uso de $R2$, $R3$, $T0$ y $T1$ (tanto $R0$ como $R1$ no son indispensables por los requisitos sobre G).

Si bien no se explicará en detalle la prueba es importante explicar algunos conceptos de ésta pues sirven de origen a la prueba de Feo y Provan. Se llama **cadena perfecta** a senderos $C = v_0 a_1 v_1 \dots a_k v_k$ tales que dos aristas consecutivas $a_{i-1} a_i$ comparten una cara $c_1 \neq c_2$ que es la cara compartida por $a_i a_{i+1}$; un **vértice múltiple** es aquel que aparece varias veces en un ciclo; un **ciclo regular** C es un ciclo en el cual aristas consecutivas e incidentes a un mismo vértice múltiple son adyacentes a una misma cara. Un ciclo regular permite dividir la gráfica de forma tal que la gráfica encajada G queda dividida en dos conjuntos T y T' mutuamente exclusivos; por último, una **singularidad** es un vértice no terminal incidente a una sola arista en T' .

Por medio del uso de cadenas perfectas Epifanov construyó lo que denominó un conjunto admisible y probó que una de las siguientes condiciones ocurrían:

- (i) El conjunto admisible puede hacerse más pequeño por medio de una transformación $T0$ o $T1$
- (ii) Es posible hallar un conjunto admisible más pequeño dentro del primero
- (iii) El conjunto admisible permite llevar a cabo una reducción

Evidentemente, de cumplirse las primeras dos condiciones, la continua reducción en el tamaño del conjunto admisible eventualmente provocará que se pueda encontrar un sitio en el cual llevar a cabo una reducción.

III.1.b. Los lentes de Grünbaum

Una prueba para una versión simplificada de la conjetura de Akers-Lehman (en la que no se consideran vértices terminales) fue presentada por Grünbaum [Gr] en 1967. Para su prueba, Grünbaum emplea las propiedades del encaje de algunas subgráficas 4- regulares, 3-conexas y planas a las que llamó **lentes**. Un lente \mathcal{L} se define como un par de caminos arista y vértice disjuntos w_1 y w_2 que unen los vértices a_1 y a_n formando un ciclo \mathcal{C} , junto con todas las aristas y vértices contenidas en uno de los dos componentes conexos definidos por \mathcal{C} en el encaje de la gráfica; además los vértices a_1 y a_n , llamados polos, no pueden ser incidentes a algún vértice interno (ver Figura III-2).

Los lentes pueden ser clasificados como **separables** e **inseparables**, donde estos últimos son aquellos que no contienen propiamente otros lentes. La prueba demuestra que cualquier gráfica plana, 4-regular y 3-conexa contiene al menos un lente inseparable; además, demuestra como para todo lente inseparable existe una secuencia de transformaciones $T0$ y $T1$ que permiten

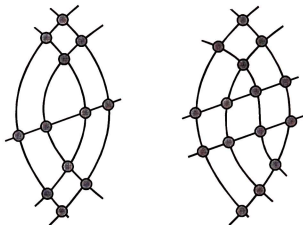


Figura III-2 Subgráficas correspondientes a un par de lentes de Grünbaum

llevar a cabo una reducción. El resultado se consigue por inducción sobre el número de aristas.

III.1.c. La prueba de Truemper

La aproximación de Truemper [T] al problema es diferente a la de Epifanov, ya que éste último trabaja sobre un encaje de la gráfica que desea reducir, mientras que Truemper se aprovecha de dos características propias de la transformada- ΔY :

- (i) Si una gráfica G 2-conexa es ΔY -reducible, cualquier menor H de G también lo es (gracias a que la transformada- ΔY es cerrada bajo menores)
- (ii) Cualquier gráfica plana es menor de una rejilla apropiada (apropiada se refiere a suficientemente grande)

Así pues, Truemper empleó una rejilla extendida como la mostrada en la *Figura III-3*; esta rejilla, salvo por la arista e que en realidad sólo se usa para facilitar la prueba (es decir, no es necesaria) siempre será posible concebirla como una gráfica plana; además, cualquier gráfica plana será menor de alguna gráfica de esta familia (para m suficientemente grande). La "virtud" del algoritmo de Truemper radica en el hecho de cómo

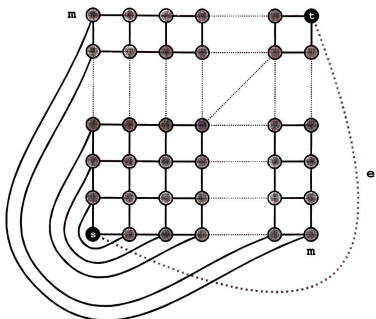


Figura III-3 Rejilla empleada por Truemper para la reducción de una gráfica planar.

coloca los vértices terminales (indicados como s y t) dentro de la rejilla, ya que es gracias a esto que no existe ninguna restricción en cuanto a la posibilidad de llevar a cabo una reducción.

Para su prueba Truemper definió dos reglas, mostradas en la *Figura III-4*, a través de las cuales reduce efectivamente una gráfica. La **Regla 1** (*Figura III-4.a*) muestra como una arista que forme parte de una Δ puede 'viajar' a través de un vértice de grado 4 hacia la 'siguiente' cara. La **Regla 2** (*Figura III-4.b*), por otra parte, resume la operación por la cual una arista se reduce en la gráfica.

El proceso que se lleva a cabo es el siguiente, suponiendo una rejilla extendida con dimensiones $m \times m$, sobre la cara de grado 3 (solamente hay una, y es adyacente a la terminal s) se emplea la Regla 2, el resultado se muestra en la *Figura III-5.a*. Lo que se lleva a cabo a continuación es una transformación $T0$ ($Y \rightarrow \Delta$) sobre una de las Y incidentes a la terminal s ; el resultado (*Figura III-5.b*), permite entonces mediante la aplicación sucesiva de la

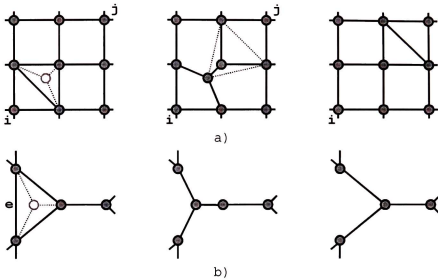


Figura III-4 Reglas empleadas por Truemper para (a) mover una arista sobre la diagonal de una rejilla y (b) para eliminar una arista e .

Regla 1, llegar a una reducción (Regla 2) de las aristas e y f (Figura III-5.c).

La nueva gráfica contará con una nueva Y como consecuencia de la eliminación de estas dos aristas, si se repite el proceso que se acaba de describir una serie de veces es posible eliminar por completo una columna al continuar transformando una Y en una delta y eliminar dos aristas de la delta. Evidentemente, esto mismo se

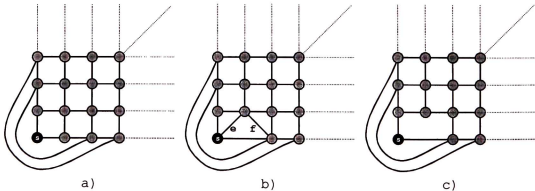


Figura III-5 Puntos de partida para la eliminación de una columna y un renglón de una rejilla extendida para el método de Truemper.

puede realizar sobre un renglón de la rejilla, obteniendo una rejilla con un renglón y una columna menos (es decir, una rejilla de dimensiones $m-1 \times m-1$); y entonces, por inducción, se puede demostrar que la gráfica finalmente se verá reducida a una sola arista.

Si bien este método es ingenioso y sumamente simple conceptualmente, el realizar un algoritmo apoyado en esta idea para la reducción de una gráfica se encuentra con la dificultad de encajar la gráfica en una rejilla como la requerida por Truemper, de tal forma que los esfuerzos continuaron.

III.1.d. La prueba de Feo-Provan

Algunos años más tarde, Feo y Provan [FP], basados fundamentalmente en la idea de Epifanov consiguieron obtener una prueba que a través de un etiquetado y un conjunto restringido de transformaciones a las que llamaron transformaciones positivas. Este algoritmo reduce efectivamente una gráfica plana con 2 terminales al describir una especie de conjuntos admisibles fijos gracias al proceso de etiquetado en que se le asigna valores a las aristas y a los vértices.

Las virtudes de este algoritmo, al que llamaron algoritmo de Reducción Delta-Estrella (RDE), estriban fundamentalmente en que el algoritmo (con un tiempo de ejecución de $O(|V|^2)$) es simple, relativamente fácil de probar, y puede ser aplicado directamente a la gráfica encajada.

Como ya fue mencionado, el algoritmo consiste de dos pasos conocidos como **etiquetado** y **reducción**. El proceso de etiquetado asigna un valor (etiqueta) a cada vértice y arista de la gráfica como sigue:

Asigne la etiqueta 0 a una de las terminales (t_1) y una etiqueta nula a todos los demás vértices y aristas;

$n \leftarrow 1$;

While (existan vértices o aristas sin etiquetar)

```

{
  A cada arista sin etiquetar incidente a un vértice
  etiquetado asigne la etiqueta  $n$ ;
  A cada arista sin etiquetar que comparta una cara
  con un vértice etiquetado, asigne la etiqueta  $n +
  1$ ;
  A cada vértice sin etiquetar adyacente a una
  arista recién etiquetada, asigne la etiqueta  $n +
  1$ ;
   $n \leftarrow n + 2$ ;
}

```

Una vez que la gráfica ha sido correctamente etiquetada es posible trabajar con alguna de las transformaciones positivas mostradas en la *Figura III-6*, aunque éste no es el conjunto completo de las transformadas positivas; en realidad en esta figura faltan 2 operaciones: la reducción de lazos (*R1*), la cual se mantiene sin cambios y la reducción de grado uno (*R0*); para ésta última se considera que en caso de que el vértice u sea una

Reducción/Transformación	Aplica sobre:	Resultado:
Reducción en serie positiva (<i>P0</i>)		
Reducción en paralelo (<i>P1</i>)		
Transformación Y-Δ (<i>P2</i>)		
Transformación Δ-Y (<i>P3</i>)		

Figura III-6 Transformadas Positivas

terminal, entonces el vértice adyacente a éste representará a la terminal una vez que se elimine a través de $R0$. Una observación importante respecto a este conjunto de transformadas es que la reducción sobre un lazo ($R1$), la reducción de aristas paralelas ($P0$) y la transformación de una delta en una 3-estrella ($P3$) se deberán realizar sólo cuando estas formen una cara cuyo interior se encuentre vacío; en otras palabras se efectúan sobre una cara de grado 1, 2 ó 3. Una segunda observación se debe efectuar con respecto al hecho de que al efectuar cualquiera de las operaciones asociadas con una transformación positiva el etiquetado se mantendrá congruente; en otras palabras, si en ese mismo instante se realizara una vez más el proceso de etiquetado, se generarían exactamente las mismas etiquetas para cada vértice y arista de la gráfica.

Para el proceso de reducción se define el siguiente algoritmo:

```

While ( $G$  no sea un solo vértice)
{
    Encuentre y realice una transformación positiva
}

```

Fácilmente se puede observar que el proceso de reducción permite decrementar el peso de la gráfica; para este caso, el **peso** se define como el valor obtenido de sumar todas las etiquetas en la gráfica, y por lo tanto la prueba se concluye sólo con demostrar que siempre es posible hallar al menos una transformada positiva. Además de demostrar que el proceso de reducción de la gráfica es finito, el que el peso de la gráfica disminuya cada que se realiza una transformada positiva permite conocer el tiempo de ejecución para este algoritmo.

La similitud con el algoritmo de Epifanov se debe a que el proceso de etiquetado fija una especie de conjuntos admisibles, a los que Feo y Provan llamaron contornos. Un **contorno** \mathcal{C} es cualquier componente 2-conexo, ya sea un ciclo regular (también

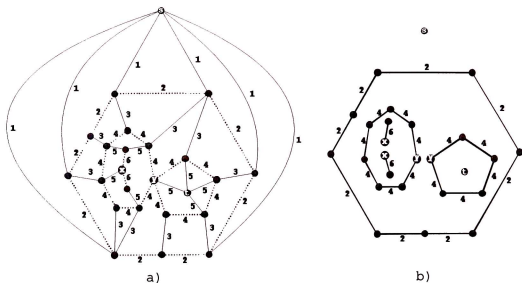


Figura III-7 (a) Ejemplo de una gráfica encajada en el plano y (b) los contornos (ya divididos) que se encuentran en ésta

designado **contorno simple**), una arista o un vértice, conformado por las aristas y los vértices de un mismo nivel n , con n par. La *Figura III-7.a* muestra una gráfica encajada que ha sido etiquetada a partir de un vértice terminal s ; la gráfica cuenta con un total de 7 contornos *Figura III-7.b*, divididos en 3 ciclos regulares (donde los de nivel 4 cuentan con un vértice común y), 2 aristas (con un vértice común x) y 2 vértices (que en este caso coinciden con los vértices terminales s y t). Los contornos, al igual que los conjuntos admisibles, dividen la gráfica en dos regiones. Puesto que el algoritmo de RDE emplea etiquetas, para un contorno de nivel l una de estas dos regiones contendrá exclusivamente aristas o vértices de nivel $l+1$ o mayor. Esta región será llamada la **región superior** de C , y la segunda la **región inferior**. Un **contorno superior adyacente** de \mathcal{C} (CSA) será cualquier contorno de nivel $l+1$ que se encuentre en la región superior de \mathcal{C} .

Feo y Provan demostraron como la incapacidad del algoritmo de RDE para realizar una transformación positiva en un contorno determinado se debe a un vértice expuesto y sus obstrucciones asociadas.

Un **vértice expuesto** v es aquel que no tiene aristas incidentes que pertenezcan a su CSA; por lo tanto, siempre que un contorno sea una arista o un vértice, no contara con un CSA, y por lo tanto, los vértices asociados a éste forzosamente serán expuestos. Si un contorno cuenta con k o menos vértices expuestos, entonces se le llamará un **k -contorno**. Existen tres tipos de obstrucciones asociadas a algún vértice expuesto simplemente llamadas de tipo 1, 2 y 3. Una obstrucción asociada a un vértice expuesto v en un contorno \mathcal{C} de nivel $l+2$ será de tipo 1 si v forma parte al menos de otro CSA (Figura III-8.a); en caso contrario la obstrucción será de tipo 2 o 3. Para las obstrucciones de tipo 2 y 3 se considerará una cara \mathcal{P} delimitada por un par de aristas e_1 y e_2 de nivel $l+1$; si ésta contiene parte de un CSA en su cerradura (Figura III-8.b) se considerará una obstrucción de tipo 2 y será de tipo 3 de no ser así. Para este último caso, la cara \mathcal{P} deberá contener en su cerradura al menos otro vértice expuesto (Figura III-8.c). La importancia de los vértices expuestos se debe a que de no formar parte de alguna obstrucción, evidentemente indicarán el sitio de una transformación positiva.

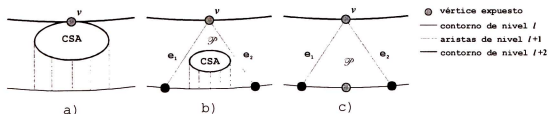


Figura III-8 Un vértice expuesto y los tres tipos de obstrucción asociados a éste

III.2. Reducción para k terminales

A partir de los trabajos presentados en las secciones anteriores se han desarrollado una serie de ideas con la intención de poder extender los resultados a gráficas con un mayor número de terminales, o bien, a gráficas que no sean estrictamente planas. Entre las ideas que se han manejado están aquellas que emplean vectores de valores para el etiquetado (dando por ejemplo un valor para cada terminal), empleando diversos encajes, restringiendo el problema, etcétera. De entre todos estos esfuerzos el que resuelve el problema para 3 terminales por primera vez es el algoritmo desarrollado por Gitler, mas aún éste permite que se continúe investigando dado que trabaja sobre un encaje especial de la gráfica. A continuación se presentarán los algoritmos de Gitler y una modificación al de Feo y Provan que señalan los pasos necesarios para resolver el problema con 3 terminales.

III.2.a. La prueba de Gitler

Si bien los algoritmos descritos son suficientes para la solución del problema que incluye 2-terminales, rápidamente se encuentran familias infinitas de gráficas con 3 o más terminales para las cuales, ninguno de los métodos descritos son suficientes.

Al respecto, se han realizado diversos esfuerzos; entre los

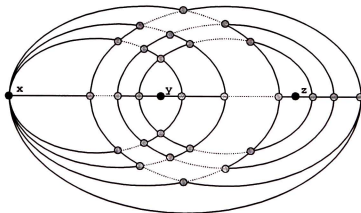


Figura III-9 Espejo perfecto con 3 terminales (x, y, z)

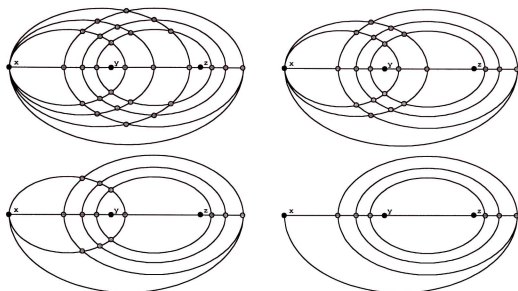


Figura III-10 Ejemplo de algunos 'estados' que brindan la noción sobre como reducir la rejilla empleada por Gitler

que han dado frutos podemos citar los trabajos de Gitler [G1, G2]; en estos, Gitler prueba como una gráfica con 3-terminales (x, y, z) puede ser reducida a K_3 . El trabajo de Gitler es muy similar en concepción al de Truemper, ya que consiste en encajar una gráfica plana en una rejilla muy particular a la que llamó espejos perfectos (Figura III-9); además generalizó el teorema sobre menores de Truemper para el caso con terminales logrando de esta forma obtener la prueba que requería.

Una vez que la gráfica ha sido encajada en este tipo de rejilla se procede a reducir su 'radio' (Figura III-10) hasta que se obtiene una forma canónica, la cual puede incluso (con las consideraciones apropiadas) ser reducida por el método de Feo y Provan para 2-terminales.

El mismo Gitler dio algunos avances sobre el problema para k -terminales con $k \geq 3$ y presentó una inspección más profunda sobre la reducibilidad de una gráfica con 4-terminales.

Es importante en este punto aclarar, que si bien se han descrito únicamente avances concernientes a la reducción de gráficas planas, muchas de estas ideas son también aplicables a

gráficas encajadas en otras superficies. Pero no sólo estas ideas han surgido alrededor de la ΔY -reducibilidad, el mismo Gitler [G1] describió como la clase de gráficas que no contienen como menor a $K_{3,3}$ así como la clase que no contiene como menor a K_5 es ΔY -reducible (no importando en que superficie esté encajada la gráfica).

III.2.b. Algoritmo de RDE modificado

La problemática sobre la reducción de una gráfica de 3-terminales ha provocado un fuerte interés por llevar a cabo un algoritmo similar al de Feo y Provan, el cual haciendo uso de un etiquetado sobre la gráfica encajada, permita reducirla hasta llegar a K_3 con sus vértices siendo las terminales, tal y como demostró Gitler.

El presente algoritmo es una modificación sobre la idea original de Feo y Provan realiza un análisis más profundo para extender la idea a tres terminales. Para la prueba del algoritmo de RDE original se utilizan los siguientes lemas:

Lema III-1 Sea \mathcal{C} un contorno en una gráfica etiquetada no trivial que no admita una transformación positiva, entonces cada vértice expuesto de \mathcal{C} debe ser un vértice terminal o adyacente a una obstrucción de tipo 1, 2 ó 3.

Lema III-2 Sea \mathcal{C} un k -contorno cuya región superior contenga al menos un vértice, entonces al menos una de las siguientes condiciones ocurre:

- (i) Existe un CSA de \mathcal{C} que no contiene obstrucciones de tipo 1 ó 2 y a lo más cuenta con k obstrucciones de tipo 3.
- (ii) Existen dos CSA's de \mathcal{C} cada uno con exactamente una obstrucción de tipo 1 ó 2 y a lo más k obstrucciones de tipo 3 entre ambos.

Lema III-3 Sea \mathcal{C} un 1-contorno simple, cuya región superior sea vértice vacía, entonces \mathcal{C} admite una transformación positiva.

Lema III-4 Sea \mathcal{C} un contorno que satisfaga alguna de las siguientes condiciones (donde t es un vértice terminal):

- (i) $\mathcal{C} = \{v\}$, $v = t$, y \mathcal{C} no contiene obstrucciones;
- (ii) $\mathcal{C} = \{v\}$, $v \neq t$, y \mathcal{C} contiene a lo más una obstrucción;
- (iii) $\mathcal{C} = \{(u, v)\}$, $v \neq t$, y v no es una obstrucción de tipo 1 ni adyacente a una obstrucción de tipo 2 ó 3.

Entonces \mathcal{C} admite una transformación positiva

En la *Figura III-11* se pueden observar un par de contornos que contienen a las terminales t_1 y t_2 , que ejemplifican a los *Lemas III-3* y *III-4*; las \times muestran los sitios donde se puede llevar a cabo una reducción.

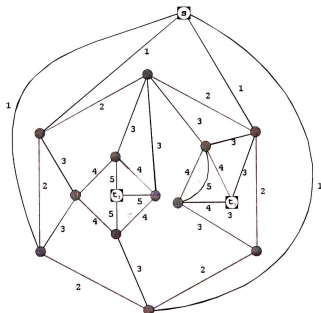


Figura III-11 Gráfica con un par de contornos que contienen a t_1 y t_2 donde se ejemplifican los *Lemas III-3* y *III-4* respectivamente.

Los cuatro lemas anteriores serán empleados como el medio para llevar a cabo las transformaciones que finalmente reduzcan la gráfica. Antes de poder proceder es necesario hacer las extensiones pertinentes para incluir una tercera terminal en la gráfica; de la lectura de los *Lemas III-1* y *III-2* es claro que no debe hacerse ninguna consideración extra cuando la gráfica cuenta con más de 2 terminales. Por otra parte, los *Lemas III-3* y *III-4* no son suficientes para todos los casos con tres terminales, las extensiones que se requieren se muestran en los siguientes dos lemas.

Lema III-5 Sea \mathcal{C} un 2-contorno simple, cuya región superior sea vértice vacía, entonces \mathcal{C} admite una transformación positiva (extendida).

Para la prueba de este *Lema* considere los distintos grados de \mathcal{C} , tal y como se muestra en la *Figura III-12* (a partir de esta figura un vértice expuesto o terminal se señalará como un círculo dentro de un cuadrado). Suponiendo que el grado de \mathcal{C} sea 2 (*Figura III-12.a*), evidentemente se tiene una reducción en paralelo $P1$; para un contorno de grado 3 (*Figura III-12.b*), debe existir una reducción de un lazo, ya que sólo existen dos vértices expuestos. Por último, el tercer caso (un ciclo de grado mayor a 3) cuenta con dos variaciones; la primera es aquella en que ambos vértices expuestos se encuentran en una misma cara; de ser así, la región

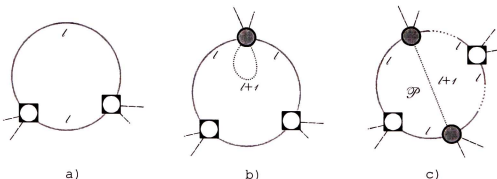


Figura III-12 Distintos casos que se presentan dependiendo del grado de un contorno \mathcal{C} de nivel l .

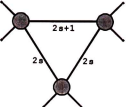
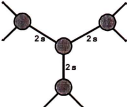
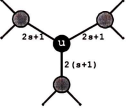
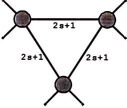
Reducción/Transformación	Aplica sobre:	Resultado:
Transformación ΔY positiva extendida (TAYe+)		
Transformación $Y\Delta$ positiva extendida (TY\Delta e+)		

Figura III-13 Transformadas positivas extendidas

del contorno que no los contenga permitirá una reducción en paralelo o una reducción de algún lazo; por otra parte, si estos se encuentran divididos, debe existir una región \mathcal{P} como la que se muestra en la *Figura III-12.c*, si se efectúa una transformación delta-estrella, esta transformación mantendrá la 'filosofía' de las transformadas positivas, ya que el peso de la gráfica se decrementaría en uno. A este nuevo tipo de transformaciones las llamaremos **transformadas positivas extendidas**, y se muestran en la *Figura III-13*.

Finalmente las variaciones al *Lema III-4* se analizarán en dos partes, la primera atacará el caso para el cual el contorno \mathcal{C} esté conformado por un sólo vértice, mientras que la segunda tratará sobre el caso en que el contorno sea una arista. Para el primer caso se tiene entonces que:

Lema III-6 Sea \mathcal{C} un contorno que satisfaga alguna de las siguientes condiciones (siendo t un vértice terminal):

- (i) $\mathcal{C} = \{v\}$, $v = t$, y \mathcal{C} contiene a lo más una obstrucción, entonces existe una transformación positiva;

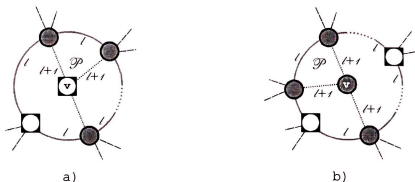


Figura III-14 Análisis para el caso en que un contorno \mathcal{C} está compuesto por un solo vértice v .

- (ii) $\mathcal{C} = \{v\}$, $v \neq t$, y \mathcal{C} contiene a lo más dos obstrucciones;

Entonces \mathcal{C} admite una transformación positiva.

Para la prueba se considerará el grado del vértice v que pertenece a un contorno \mathcal{C} de nivel $l+2$; así pues, es evidente que para el caso en que v es una terminal, se podrá llevar a cabo una reducción de grado 1 (si $d(v)=1$), una reducción en paralelo o una transformación- ΔY positiva (para $d(v)=2$); o bien, una transformación- ΔY positiva (para $d(v) \geq 3$), ya que v es adyacente a una sola obstrucción y por lo tanto cualquier par de aristas de nivel $l+1$ deberán formar una cara \mathcal{P} como la que se muestra en la *Figura III-14.a*. Para el caso en que el vértice v sea distinto a la terminal, las transformaciones posibles serán la reducción de lazo, una reducción en serie o paralelo, o una transformación ΔY positiva dependiendo de si el grado de v es 1, 2 ó mayor a 3 respectivamente (ver *Figura III-14.b*).

Resta pues por analizar el equivalente a un contorno compuesto por una arista; para tal fin se emplearán los siguientes *Lemas*:

Lema III-7 Sea un contorno $\mathcal{C} = \{(u, v)\}$, y $v \neq t$, adyacente a una obstrucción de tipo 2 o 3, entonces \mathcal{C} admite una transformación positiva (extendida).

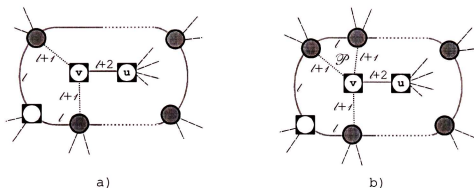


Figura III-15 Casos para los que el contorno \mathcal{C} es una arista con uno de sus vértices (v) distinto a una terminal.

Por la definición de v es claro que su grado deberá ser mayor o igual a 3, para el caso en que sea igual a 3 entonces el vértice v deberá admitir una transformación-YA positiva extendida (TYAe+), tal y como se puede apreciar en la *Figura III-15.a*. Por otra parte, si el grado es mayor que 3 entonces debe existir una cara \mathcal{P} , que no es una obstrucción; y por tanto, será una transformación- ΔY positiva (TAY+) *Figura III-15.b*. Una gráfica que contiene sólo transformaciones positivas extendidas se presenta en la *Figura III-16*, nuevamente la \star indica un posible punto de transformación; las transformaciones adyacentes a t_1 y t_2 ejemplifican respectivamente el uso de los *Lemas III-5* y *III-7* respectivamente.

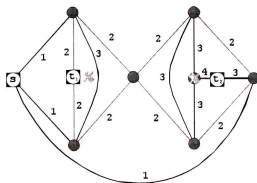


Figura III-16 Gráfica que no sólo transformaciones positivas extendidas.

Es importante aquí resaltar que no se hizo ninguna suposición sobre si u era un vértice terminal o adyacente a alguna obstrucción, aunque evidentemente lo 'peor' que puede ocurrir es que sí lo sea.

Los lemas anteriores (III-1 a III-7) cubren fundamentalmente todas las formas que puede contener una gráfica en un contorno excepto el caso donde el contorno es una arista $\{(u, v)\}$ y v es adyacente a una obstrucción de tipo 1 o es una terminal. Si es adyacente a una obstrucción de tipo 1, entonces se puede hallar al menos un contorno más del mismo nivel. En general, se puede encontrar un subconjunto conexo de contornos del mismo nivel que pueden asociarse a una estructura arbórea (ver Figura III-17).

Lema III-8 Sea \mathcal{C}^* un conjunto maximal de contornos conexos adyacentes a lo más a 2 obstrucciones tipo 2 ó 3 y \mathcal{A}^* el árbol asociado a \mathcal{C}^* ; si existe un vértice $v^* \in V(\mathcal{A}^*)$ tal que $d(v^*) \geq 3$, entonces al menos uno de los contornos en \mathcal{C}^* admite una transformación positiva.

Para la prueba basta observar como alguno de los contornos en \mathcal{C}^* permite el empleo de alguno de los *Lemas III-3 a III-7*.

El último caso que se requiere analizar es aquel en que se cuenta con un conjunto de contornos conexos \mathcal{C}^* que forman un

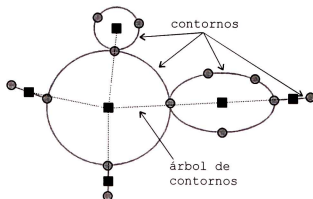


Figura III-17 Subgráfica conformada por contornos conexos y su árbol de contornos asociado

camino, siendo los vértices en los extremos del camino vértices terminales; estas condiciones llevan al siguiente lema:

Lema III-9 Sea \mathcal{C}^* un conjunto conexo maximal de contornos de nivel $l+2$ que forman un camino t_1, t_2 siendo estos dos vértices terminales, además \mathcal{C}^* no es adyacente a obstrucciones de tipo 2 ó 3. Entonces alguna de las siguientes condiciones se satisface:

- (i) Si $d(v)=3$ para $v \in V\{\mathcal{C}^*\}$ o v cuenta con dos aristas de nivel $l+1$ formando una cara, entonces v está asociado a una transformación positiva.
- (ii) Si el grado de un vértice terminal (t_1 ó t_2) es mayor o igual a 3 entonces existe una transformación positiva asociada a la terminal.
- (iii) Si $d(v)=4$ para todo $v \in V\{\mathcal{C}^*\}$, entonces existe una transformación negativa como resultado de este contorno.

La prueba de los casos (i) y (ii) resulta evidente de la simple observación de la *Figura III-18.a* y *.b*. Para el caso (iii) es preciso antes de cualquier otra cosa definir una **transformada negativa**. Llamaremos transformada negativa a una transformación ΔY

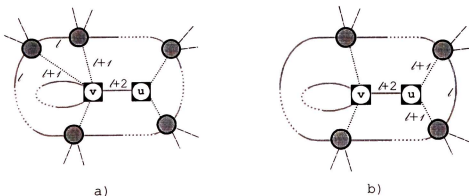


Figura III-18 a) Un vértice adyacente a una obstrucción de tipo 1 con más de dos aristas de nivel $l+1$ formando una cara, así como b) una terminal de grado mayor a 2 en el 'extremo' de un contorno admiten una transformación positiva.

Reducción/Transformación	Aplica sobre:	Resultado:
Transformación $Y\Delta$ positiva ($TY\Delta^-$)		
Transformación ΔY positiva ($T\Delta Y^-$)		

Figura III-19 Transformaciones negativas

positiva ($T\Delta Y^+$) o una transformación $Y\Delta$ positiva ($TY\Delta^+$) que opera en forma inversa (Figura III-19).

La prueba del *Lema III-9.iii* surge de la simple observación de que cada uno de los lemas utilizó la idea del CSA, pero es igualmente válido 'voltear' la gráfica y considerar los mismos argumentos para la región inferior y el CIA, siempre y cuando se cumplan las condiciones del lema, ya que de no ser así se corre el riesgo de que algún vértice en \mathcal{V}^* actúe como una obstrucción para los contornos inferiores.

Es obvio entonces, que para poder seguir adelante es preciso contar con alguna especie de marca que indique si una Y (Δ) es el resultado transformación $T\Delta Y^+$ ($TY\Delta^+$) o bien, de su contraparte negativa, de tal forma que no simplemente se esté iterando sin sentido (el conjunto completo de operaciones de la Transformada- ΔY para el algoritmo RDE modificado se muestra en el Apéndice A).

Simplemente como prueba de este último caso considere las gráficas de la Figura III-20, éstas tienen la particularidad de cumplir sólo el *Lema III-9.iii*; además, por ser simétricas, al etiquetarse desde cualquier vértice terminal se tendría exactamente el mismo etiquetado.

Teorema III-1 El algoritmo RDE Modificado reduce una gráfica plana encajada G con 3 terminales.

Prueba: Suponga que etiqueto G a partir de un vértice terminal s .

Sea entonces C un k -contorno de nivel máximo 1, con $k \leq 2$ y a lo más $2-k$ terminales en su región superior (esta región debe existir debido al contorno $\{s\}$).

Puesto que Feo y Provan ya probaron el algoritmo para un 1-contorno el resto de la prueba asumirá que se trata de un 2-contorno. Primero suponga que C tiene una región superior vértice vacía; entonces el *Lema III-5* aplica y por lo tanto C admite una transformación positiva (extendida); de no ser así se utiliza el *Lema III-2* y se cuenta con uno de los siguientes casos.

Caso 1: Existe un CSA D que no cuenta con obstrucciones tipo 1 ó 2 y a lo más es indicente a 2 obstrucciones de tipo 3. Si D es un vértice entonces el *Lema III-6* aplica sobre D . Si D es una arista y alguno de sus vértices no es terminal, entonces el

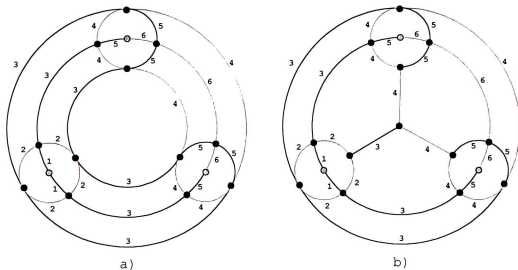


Figura III-20 Par de gráficas planas que cumplen con el *Lema III-9*, una de ellas a) sólo admite transformaciones positivas, y en la otra b) se puede observar una sola transformación positiva (que bloquearía tres negativas).

Lema III-7 aplica sobre D . Finalmente si D es simple y G no admite una transformación positiva, entonces el *Lema III-1* implica que D puede tener a lo más $k+r$ vértices expuestos, donde r es el número de terminales en C , por lo tanto D es un contorno de nivel superior a C que cumple con todas las propiedades de C , contradiciendo la elección de este contorno.

Caso 2: Existe un árbol \mathcal{F}^* asociado a un conjunto de contornos conexos \mathcal{D}^* formado por el conjunto maximal de CSA's a C tal que si existe un vértice de grado mayor o igual a 3 entonces el *Lema III-8* o el *Lema III-1* se pueden aplicar; llevando a una posible transformación positiva o bien a una contradicción de forma similar a lo que ocurrió en el caso 1.

Caso 3: Existe un árbol (camino) \mathcal{F}^* asociado a un conjunto de contornos conexos \mathcal{D}^* formado por el conjunto maximal de CSA's a C . Si los extremos de este camino son distintos a una terminal, entonces se efectuará una transformada positiva (extendida) como consecuencia del *Lema III-7*. Sólo queda entonces la posibilidad de que el camino cuente con vértices terminales en sus extremos; de tal forma que si alguno de los vértices terminales tiene grado mayor a 2 entonces el *Lema III-9ii* asocia a la terminal una transformación positiva. Por otra parte, cualquier vértice v en \mathcal{D}^* distinto a una terminal tiene exactamente 2 aristas de nivel $l+2$, de forma que si su grado es igual a 3 o bien tiene dos aristas de nivel $l+1$ limitando una cara entonces el *Lema III-9i* aplica. En caso contrario, esto querría decir que v tiene exactamente grado 4 y sus dos aristas de nivel $l+1$ se encuentran en caras distintas, por lo que el algoritmo en ese momento debe hacer uso de una transformada negativa como consecuencia del *Lema III-9iii*. Esto cubre todos los casos y por lo tanto se ha concluido la prueba. \square

Es evidente que como corolario del Teorema anterior, la modificación al algoritmo de RDE permite reducir efectivamente una gráfica de 3 terminales.

IV. Matrices Intercaladas

Una **matriz pseudolatina** es aquella matriz donde cada entrada, o valor para una coordenada en particular, es etiquetada (o coloreada) de manera que no se repite un color por renglón o columna. Si además toda submatriz de 2×2 contiene 2 ó 4 colores entonces la matriz será llamada **intercalada**; cuando una submatriz de 2×2 contiene dos colores se le llamará una **intercalación** y en caso contrario (cuando tenga 4 colores) se llamará **cointercalación**.

Una matriz intercalada será de *tipo* (r, s, n) si tiene r renglones, s columnas y n colores en total; por ejemplo, la *Figura IV-1* muestra una matriz de tipo $(4, 8, 16)$. Las matrices intercaladas (MI's) tienen una variedad de propiedades interesantes; por ejemplo, un MI puede ser formada a partir de otra simplemente seleccionando un grupo de sus columnas y renglones. Otra propiedad de las MI's es que siempre que se realice una permutación de renglones o columnas ésta permanecerá siendo una MI; precisamente de esta posibilidad se desprende la siguiente definición: dos matrices serán **isotópicas** si se puede transformar una en la otra usando permutaciones de renglones y columnas y, en caso necesario, renombrando sus colores.

IV.1. Reformulación en teoría de gráficas

Una MI puede ser descrita mediante gráficas si se considera que se cuenta con una gráfica bipartita completa $K_{r,s}$ y una

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 13 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 10 & 14 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 & 11 & 15 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Figura IV-1 Matriz intercalada de tipo $(4, 8, 16)$

asignación de colores en el conjunto $\{1, \dots, n\}$ sobre sus aristas tal que:

- (i) Cada par de aristas incidentes en un vértice tienen un color distinto.
- (ii) Todo ciclo de longitud cuatro tiene dos o cuatro colores.

La relación entre una MI de tipo (r, s, n) y una gráfica $K_{r,s}$ debe ser tal que los vértices de la gráfica representen los r renglones y las s columnas de la matriz; además las aristas que las relacionan podrán ser etiquetadas de forma tal que concuerden que las entradas que existan para una coordenada en particular. Para clarificar un poco más lo anterior considere la MI de tipo $(4, 8, 16)$ de la *Figura IV-1*; la gráfica que describe a esta matriz se muestra en la *Figura IV-2*.

Un problema importante relacionado con las MI's es aquel

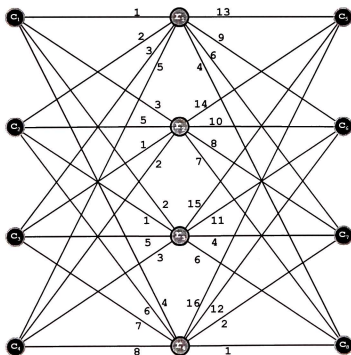


Figura IV-2. Gráfica $K_{4,8}$ correspondiente a la MI de la Figura IV-1

donde se desea encontrar la mínima n para una matriz intercalada de tipo (r, s, n) , una matriz de este tipo se llamará de **coloración mínima** u **óptima**; un ejemplo de dos matrices óptimas se puede observar en la *Figura IV-3*. Asociado a este problema se puede encontrar la conjetura de Yuzvinsky [Y], la cual ha permanecido abierta por más de una década; ésta se presenta a continuación.

IV.2. Conjetura de Yuzvinsky

La conjetura de Yuzvinsky manifiesta que toda matriz intercalada de tipo (r, s, n) satisface que $n \geq r \circ s$, donde $r \circ s$ es la función de Pfister; ésta se puede calcular recursivamente de acuerdo a la siguiente expresión:

$$r \circ s = \begin{cases} s \circ r & \text{si } r > s \\ r & \text{si } s = 1 \\ 2^{t-1} + r \circ (s - 2^{t-1}) & \text{si } r > s \\ 2^t & \text{si } 2^{t-1} < r, s \leq 2^{t-1} \end{cases} \quad (\text{EC. IV-1})$$

Yuzvinsky fue capaz de demostrar su conjetura para el caso en que las matrices intercaladas son submatrices de la tabla de Cayley del grupo diádico; a éstas se les conoce como **matrices intercaladas diádicas**.

La conjetura está completamente resuelta para el caso diádico; sin embargo, para el caso general sólo se han resuelto completamente los rangos para $r, s \leq 16$ y $r \leq 5$. A pesar de esto es de gran interés obtener una solución completa para el rango de $r, s \leq 32$; debido a la relación existente entre este problema y el de producto de sumas.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Figura IV-3 Un par de matrices intercaladas óptimas.

El problema del producto de sumas sobre los enteros es el siguiente: dados tres números naturales r , s y n decidir si existe una fórmula del tipo:

$$(x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_s^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2 \quad (\text{Ec. IV-2})$$

donde x_i e y_j (con $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$) son indeterminadas y cada z_k (con $1 \leq k \leq n$) es una forma bilineal en x e y ; cuando tal fórmula existe, se dice que la tripleta (r, s, n) es **admisibile**.

En la actualidad se conoce que una tripleta (r, s, n) es admisible si y sólo si existe una MI de tipo (r, s, n) que pueda signarse consistentemente. Una MI está **signada** si los valores para las distintas coordenadas cuentan con un signo positivo o negativo (Figura IV-4); si además se cumple el producto de los signos de los elementos para cada intercalación es negativo, entonces la MI habrá sido signada **consistentemente**.

Dada la MI signada que aparece en la Figura IV-4 ha sido signada consistentemente, entonces es posible decir que la tripleta $(4, 4, 4)$ es admisible ya que se puede obtener la fórmula:

$$\begin{aligned} z_1 &= +x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 \\ z_2 &= +x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3 \\ z_3 &= +x_1y_3 + x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2 \\ z_4 &= +x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1 \end{aligned} \quad (\text{Ec. IV-3})$$

donde x_i , y_j y z_k corresponden con el renglón i , la columna j y el color k ($1 \leq i, j, k \leq 4$) respectivamente.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	+1	+2	+3	+4
x_2	+2	-1	-4	+3
x_3	+3	+4	-1	-2
x_4	+4	-3	+2	-1

Figura IV-4 Ejemplo de una MI signada

Una forma más de resolver el problema de signabilidad es a través de la **matriz de incidencia** de A (\tilde{A}), la cual contará con las coordenadas como renglones y las intercalaciones como columnas, siendo 1 el valor para una coordenada de \tilde{A} cuando alguna coordenada de A forme parte de la intercalación. Dada la matriz \tilde{A} y el vector \tilde{I} (que contiene sólo unos en sus entradas), es posible verificar que:

Lema IV-1 A es signable si y sólo si el sistema de ecuaciones $x\tilde{A}=\tilde{I}$ tiene solución sobre $GF(2)$.

Lema IV-2 Uno y sólo uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene solución sobre $GF(2)$: $x\tilde{A}=\tilde{I}$ ó $\tilde{A}w=0, \tilde{I}w=1$.

Como ejemplo de todo lo anterior considere que se cuenta con la matriz signada de la *Figura IV-4*; esta matriz cuenta con 12 intercalaciones que se presentan a continuación:

Interc.	renglones	columnas	colores
I_1	x_1, x_2	y_1, y_2	1, 2
I_2	x_1, x_2	y_3, y_4	3, 4
I_3	x_1, x_3	y_1, y_3	1, 3
I_4	x_1, x_3	y_2, y_4	2, 4
I_5	x_1, x_4	y_1, y_4	1, 4
I_6	x_1, x_4	y_2, y_3	2, 3
I_7	x_2, x_3	y_1, y_4	2, 3
I_8	x_2, x_3	y_2, y_3	1, 4
I_9	x_2, x_4	y_1, y_3	2, 4
I_{10}	x_2, x_4	y_2, y_4	1, 3
I_{11}	x_3, x_4	y_1, y_2	3, 4
I_{12}	x_3, x_4	y_3, y_4	1, 2

brevemente, se puede comprobar como esta matriz de intercalaciones (a la que se podría llamar In) describe cada una de las intercalaciones, conteniendo los renglones, las columnas y los colores que las conforman.

Tomando entonces como entrada la matriz In , la matriz \tilde{A} luciría como:

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}
a_{11}	1		1		1							
a_{12}	1			1		1						
a_{13}		1	1			1						
a_{14}		1		1	1							
a_{21}	1						1		1			
a_{22}	1							1		1		
a_{23}		1						1	1			
a_{24}		1					1			1		
a_{31}			1				1				1	
a_{32}				1				1			1	
a_{33}			1					1				1
a_{34}				1			1					1
a_{41}					1				1		1	
a_{42}						1				1	1	
a_{43}						1			1			1
a_{44}					1					1		1

de tal forma que se puede considerar que el vector x sea:

$$x = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0] \quad (\text{Ec. IV-4})$$

generando como resultado que $x\tilde{A} = \tilde{I}$ y por lo tanto se puede verificar una vez más que A es signable.

La bondad de trabajar con estas matrices es que se puede hacer uso de cada uno de los conceptos de los capítulos anteriores en esta teoría. Para aclarar más lo anterior simplemente observe como la matriz de intercalaciones In forma un conjunto de cuadriláteros, donde los vértices son los renglones y las columnas, además las etiquetas de las aristas corresponderían con el valor para la coordenada entre un renglón y una columna; de tal forma que pueden ser empleados como caras de un polígono y por tanto es posible el uso de la transformada delta-estrella.

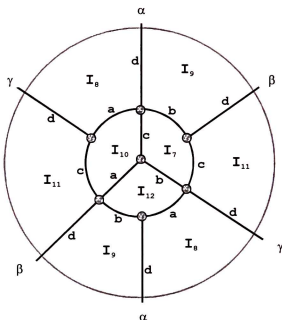


Figura IV-5 Gráfica compuesta por seis intercalaciones encajada en el plano proyectivo.

Para verificar una vez más la utilidad de la transformada delta-estrella, con las modificaciones requeridas por la naturaleza de la gráfica, permite obtener las distintas soluciones para las cuales se cumple que $\tilde{A}w=0$. Considere por ejemplo una gráfica donde intervengan las intercalaciones $I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}$ e I_{12} como la que se muestra en la *Figura IV-5*; ésta gráfica surge como una posible solución para $\tilde{A}w=0$, donde:

$$w = [0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1] \quad (\text{Ec. IV-5})$$

La bondad de la transformada delta-estrella es que se pueden realizar transformaciones sobre una estrella y sus caras adyacentes para generar una nueva solución (ver *Figura IV-6*) Resulta además que esta gráfica en realidad, puede ser descompuesta en tres gráficas más que corresponden a la gráfica de los renglones, las columnas y los colores; por ejemplo la gráfica de las columnas puede construirse a partir de esta si se conectan dos vértices que corresponden a una columna siempre que se encuentre compartiendo una cara, para este caso no es difícil

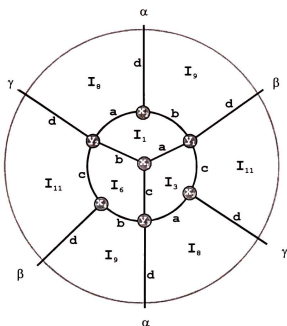


Figura IV-6 Resultado de transformar la *Figura IV-5*; la gráfica generado una vez más obtiene una solución para $\bar{A}w=0$.

comprobar que dicha gráfica sería K_4 , con los vértices siendo las columnas y_1 a y_4 .

IV.3. El problema de conocimiento común

El problema de conocimiento común se aplica sobre un conjunto de entidades (personas, procesadores, compañías, etc.) que deben conocer la misma cantidad de información (datos, secretos, etc.).

Este tipo de condiciones se hacen necesarias en eventos tales como las subastas, elecciones, competiciones para algún desarrollo, etc. en las cuales es importante que las entidades adquieran los conocimientos de una forma 'justa'; es decir, siempre se deberá cumplir que si en un cierto instante una entidad A adquiere una unidad de información conocida por otra entidad B , entonces en ese mismo instante B adquiere una unidad de información conocida por A .

En el supuesto de que se cuente con s procesadores (P_1, \dots, P_s) y n datos desconocidos (D_1, \dots, D_n), estos datos deberán ser enviados a los procesadores tomando en consideración las siguientes reglas:

1. La unidad de tiempo para enviar los datos es discreta ($1, 2, \dots$) y todos los procesadores adquieren un dato por cada período.
2. No es posible enviar el mismo dato a dos procesadores en una misma unidad de tiempo.
3. No se puede enviar más de un dato por período de tiempo a un procesador.
4. Si en la unidad de tiempo t_1 se enviaron los datos D_x y D_y al procesador P_i y P_j respectivamente, y para el tiempo t_2 (con $t_2 > t_1$) P_j obtiene el dato D_x entonces P_i debe obtener durante el tiempo t_2 el dato D_y .

Dadas las condiciones anteriores se pueden establecer las siguientes relaciones con una MI: el proceso de transmisión de datos se debe de finalizar al cabo de r unidades de tiempo (que corresponderán a los r renglones de la matriz), para los s procesadores, P_1, \dots, P_s (o s columnas de la matriz), que recibieron alguna combinación de entre los n datos D_1, \dots, D_n (n colores de la matriz).

V. Conclusiones

Las transformadas- ΔY se presentan como una herramienta de gran utilidad dada la variedad de problemas que pueden ser resueltos a partir de su uso. Entre estos, existen algunos que generan un resultado global exclusivamente mediante el análisis local empleado por las transformadas tal y como se puede ratificar en el Apéndice C; un ejemplo de tales aplicaciones es el trabajo presentado por Lehman [L] para reducir gráficas probabilísticas sin terminales y su aplicación directa para obtener la confiabilidad de una red. Dicho problema fue extendido más tarde por Chari, Feo y Provan [CFP] para el caso con dos terminales, y se espera que el algoritmo presentado en esta tesis, sirva como base para la extensión al caso con tres vértices terminales. En caso de que se pruebe que las ecuaciones propuestas por Lehman son válidas para el caso con tres terminales, el algoritmo que se propone además sería el mejor algoritmo para la aproximación de la confiabilidad de una red, no sólo por la exactitud de la aproximación, sino también por la velocidad de éste ($O(n^2)$).

Si bien, en la presente tesis se reduce el análisis del algoritmo de RDE Modificado al caso en que la gráfica es plana, algunos de los resultados son igualmente aplicables para el caso en que la gráfica puede ser encajada en una superficie distinta a la esfera y por esto se incluye una librería para el manejo de gráficas no planas (Apéndice B), mas tal estudio va más allá de los alcances de éste documento; no obstante, en el Apéndice D se brindan algunos datos concernientes a la reducción de gráficas no planas.

Una pregunta importante relacionada con el uso de las transformadas es si se puede o no mejorar el tiempo de ejecución del algoritmo de $O(v^2)$ a $O(v\sqrt{v})$, algunos datos prácticos parecen confirmar tal idea; sin embargo, no existe aún alguna prueba que lo demuestre en una forma contundente. El algoritmo de RDE

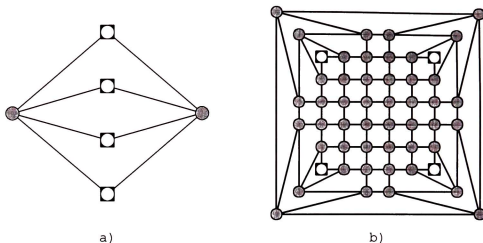


Figura V-1 Un par de gráficas con 4 terminales no ΔY -reducibles, la gráfica de la derecha (b) pertenece a una familia infinita de gráficas irreducibles.

Modificado podría brindar también algún avance al respecto, esto gracias a que las transformaciones positivas y las negativas al parecer pueden ser llevadas a cabo en forma paralela sin interferir entre sí; mas esto último aún no es claro y requiere de un mayor análisis para comprobar o refutar su veracidad.

Finalmente, una última línea que podría verse beneficiada a raíz del presente trabajo, es aquella que estudia el caso para gráficas con k -terminales. Si bien es cierto que una vez que se incluye una cuarta terminal existen incluso familias infinitas de gráficas que no son ΔY -reducibles (ver *Figura V-1*), esto no implica que todas las gráficas con más de 3 terminales lo sean tal y como lo demostró Gitler [G1] para el caso en todos los vértices terminales se encuentran sobre una misma cara.

Apéndice A

Conjunto de operaciones para el algoritmo RDE modificado

Reducción/Transformación	Aplica sobre:	Resultado:
Reducción de grado 1 (Rg1)		
Reducción de lazos (Rl)		
Reducción en serie (Rs)		
Reducción en paralelo (Rp)		
Transformación YA positiva (TYA+)		
Transformación AY positiva (TAY+)		
Transformación YA positiva extendida (TYAe+)		
Transformación AY positiva extendida (TAYe+)		
Transformación YA positiva (TYA-)		
Transformación AY positiva (TAY-)		

Apéndice B

Estructuras y funciones de la biblioteca "mapc"

```
typedef struct
{
    int a;
    int c;
    int v;
} cruz;
```

La estructura **cruz** contiene los tres elementos que definen la cruz de una arista (arista, cara y vértice)

```
typedef struct
{
    int bor;
    int c1;
    int c2;
    int v1;
    int v2;
    cruz pi1;
    cruz pi2;
    cruz pi3;
    cruz pi4;
} nodo_a;
```

Esta estructura (**nodo_a**) mantiene las dos caras y los dos vértices asociados a una arista; adicionalmente cuenta con cuatro pi's: pi1, pi2, pi3 y pi4 que corresponden a las cruces resultantes de realizar la operación $\pi(\cdot)$ desde la cruz $\langle a, c1, v1 \rangle$, $\langle a, c1, v2 \rangle$, $\langle a, c2, v1 \rangle$ y $\langle a, c2, v2 \rangle$ respectivamente; a partir de este punto, cualquier referencia a pi1 hasta pi4 se referirá a este mismo resultado. Por último la variable **bor** tiene un doble fin: indicar que la arista se encuentra borrada y si lo está, mantener una pila de aristas borradas.

```
typedef struct
{
    int
        a_bor,
        c_bor,
        v_bor,
        maxa, maxc, maxv;
    nodo_a
        *a_a;
    int
        *a_c, *a_v;
    cruz
        crz;
} *mapc, mapc_;
```

La estructura **mapc** es la más importante de la utilería, esta contiene todos los elementos requeridos por el mapa combinatorio

así como los datos esenciales para su adecuado manejo en memoria. Las primeras tres variables; **a_bor**, **c_bor** y **v_bor**; son apuntadores al primer espacio libre en las pilas para una arista, cara y vértice respectivamente. Las variables **maxa**, **maxc**, y **maxv** representan la cantidad máxima de aristas, caras y vértices que podrán ser almacenados en memoria. El apuntador **a_a** permite almacenar un arreglo de 'aristas' (junto con sus valores asociados), mientras que los apuntadores **a_c** y **a_v** son arreglos donde a cada cara y vértice se le asocia una arista. Finalmente la variable **crz** es un indicador (*cursor*) que contiene una cruz en particular de la gráfica, que puede ser utilizada para realizar las distintas operaciones asociadas con los mapas combinatorios.

```
void ini_pi_mapc      (cruz *pi, int a, int c, int v);
```

Asocia a cada cruz (definida por *a*, *c* y *v*) una pi.

```
int  pop_a_bor_mapc  (mapc mc);
int  pop_c_bor_mapc  (mapc mc);
int  pop_v_bor_mapc  (mapc mc);
void psh_a_bor_mapc  (mapc mc, int a);
void psh_c_bor_mapc  (mapc mc, int c);
void psh_v_bor_mapc  (mapc mc, int v);
```

Operaciones pop y push sobre las pilas de aristas, caras y vértices borrados.

```
void actlza_a_c_mapc (mapc mc, int c, int a);
void actlza_a_v_mapc (mapc mc, int v, int a);
```

Asocia a los arreglos de caras y vértices (**a_c** y **a_v**) una arista (**a**) en particular.

```
int  c_comun_mapc    (mapc mc, int a1, int a2);
int  v_comun_mapc    (mapc mc, int a1, int a2);
```

Dadas un par de aristas permite identificar si estas cuentan con un vértice o una cara en común.

```
void rimplza_c_mapc  (mapc mc, int a, int c, int cnva);
void rimplza_v_mapc  (mapc mc, int a, int v, int vnvo);
void rimplza_pi_mapc (mapc mc, cruz crz, cruz pi_nva);
```

Permite modificar los valores que se encuentran asociados en una aristas por una nueva cara, vértice o pi.

```
void actualiza_mapc  (mapc mc);
int  lee_nodo_a_mapc (mapc mc, FILE *arch);
void esc_nodo_a_mapc (mapc mc, int a, FILE *arch);
```

Auxiliares de las funciones que permiten guardar (leer) un mapa combinatorio a (de) un archivo. La primera (**actualiza_mapc**) modifica las pilas de elementos borrados una vez que se ha leído la totalidad de un archivo con un mapa combinatorio. Las otras dos funciones (**lee_nodo_a_mapc** y **esc_nodo_a_mapc**) se utilizan para leer y escribir a un archivo la información asociada a una arista.

```
int  cl_a_mapc      (mapc mc, int a);
```

```

int    c2_a_mapc      (mapc mc, int a);
int    v1_a_mapc      (mapc mc, int a);
int    v2_a_mapc      (mapc mc, int a);
int    v_pi_mapc      (mapc mc, cruz crz);

```

Permiten conocer los valores de cada uno de los elementos asociados a una arista (caras, vértices y pi's).

```

cruz   cruz_mapc      (mapc mc);
int    a_mapc         (mapc mc);
int    c_mapc         (mapc mc);
int    v_mapc         (mapc mc);

```

Devuelven los valores asociados al *cursor*, otorgando el cursor mismo, o bien, la arista cara o vértice a que se refiera el cursor. Si bien no existe ninguna restricción sobre el uso de las funciones este grupo de funciones junto con las que se presentan a continuación son aquellas que se prestan más para el manejo por parte del usuario; mientras que las anteriores son empleadas en mayor medida para la 'administración y manejo' de la estructura mapc.

```

int    max_a_mapc     (mapc mc);
int    max_c_mapc     (mapc mc);
int    max_v_mapc     (mapc mc);

```

Indican los valores máximos para el número de aristas, caras y vértices que pueden ser almacenadas en el mapa combinatorio (**mc->maxa**, **mc->maxc**, **mc->maxv**).

```

int    gradov_mapc    (mapc mc, int v);

```

Obtiene el grado de un vértice

```

cruz   fi_mapc        (mapc mc);
cruz   teta_mapc      (mapc mc);
cruz   pi_mapc        (mapc mc);
cruz   p_mapc         (mapc mc);
cruz   pinv_mapc      (mapc mc);
cruz   q_mapc         (mapc mc);
cruz   qinv_mapc      (mapc mc);

```

Realizan las operaciones ϕ , θ , π , p (p inversa) y q (q inversa) tomando como parámetro el valor del cursor (**mc->crz**). Las operaciones p y q combinaciones de las tres operaciones básicas y se definen como $p = \pi(\theta(\cdot))$ y $q = \pi(\phi(\cdot))$.

```

cruz   vea_a_mapc     (mapc mc, int a);
cruz   vea_c_mapc     (mapc mc, int c);
cruz   vea_v_mapc     (mapc mc, int v);
cruz   vea_ac_mapc    (mapc mc, int a, int c);
cruz   vea_av_mapc    (mapc mc, int a, int v);
cruz   vea_cv_mapc    (mapc mc, int c, int v);
cruz   vea_acv_mapc   (mapc mc, int a, int c, int v);

```

Permiten posicionar el cursor en algún punto determinado de la gráfica asociado a cualquier arista, cara, vértice o alguna combinación entre estos.


```

int   bor_a_mapc      (mapc mc, int a);
int   cntr_a_mapc    (mapc mc, int a);
int   ins_a_mapc      (mapc mc, cruz pi1, cruz pi2);
int   xpnd_a_mapc     (mapc mc, cruz pi1, cruz pi3);

```

Funciones relacionadas con las operaciones típicas en el manejo de gráficas y en particular sobre las aristas (borrado, contracción insertado y 'expansión'). La operación de expansión consiste en dividir las aristas de un vértice u en dos conjuntos X , Y (donde la selección de X y Y respete el encaje) asociando cada uno de estos conjuntos a un par de nuevos vértices x , y ; uniendo ambos vértices mediante una arista $a=(x,y)$ y borrando el vértice u .

```

mapc  crea_mapc       (int m_a, int m_c, int m_v);
void  dest_mapc       (mapc mc);

```

Crean y destruyen todos los elementos requeridos por la estructura **mapc** en memoria. Para el proceso de creación se toma en cuenta la cantidad máxima de aristas, caras y vértices con que se ha de trabajar.

```

mapc  lee_arch_mapc   (char *archivo);
int   esc_arch_mapc   (mapc mc, char *archivo, char *mensaje);

```

Permite leer (guardar) una gráfica almacenada en memoria (**mapc**) desde (a) un archivo.

Apéndice C

Aplicaciones de la Transformada- ΔY

Para resaltar la importancia de la Transformada- ΔY a continuación se presentarán una serie de problemas combinatorios bien conocidos donde la transformada- ΔY ha sido empleada. Para tal fin se definirán las relaciones de estos problemas por medio de gráficas sobre las cuales se llevarán a cabo reducciones y transformadas que aplicadas en forma iterativa permiten reducirla a una gráfica trivial en un número polinomial de pasos. Por lo tanto, para resolver un problema definido sobre una gráfica, primero se llevará a cabo el proceso de reducción y después de manera recursiva una solución es obtenida para la gráfica original. Cada aplicación contará con la explicación del problema, el conjunto de ecuaciones relacionadas con los parámetros asociados a éste y sus respectivas referencias. En general cada gráfica contará con pesos asociados que serán los parámetros de las ecuaciones que se deseen resolver tal y como se muestra en la *Figura C-1*.

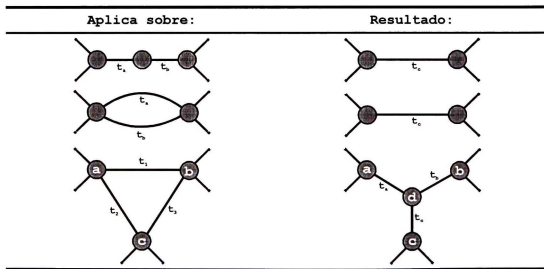


Figura C-1 Pesos asociados a los parámetros para la solución de un problema a través de gráficas

Camino más corto [Ak]

El problema del camino (o la ruta) más corto(a) se define sobre una gráfica plana no dirigida G con dos terminales especificadas u , v y una longitud l_e (t_e) asociada a cada arista $e \in E$. Para éste problema se desea conocer la longitud de la ruta más corta entre los puntos u y v . El conjunto de ecuaciones asociadas que se requiere son:

Operación:	Fórmula:
Reducción en serie	$t_c = t_a + t_b$
Reducción en paralelo	$t_c = \min\{t_a, t_b\}$
Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$	$t_1 = t_a + t_b$ $t_a = (t_1 + t_3 - t_2)/2$ $t_1 = \min\{t_1, t_2 + t_3\}$ $t_2 = t_a + t_c$ $t_b = (t_1 + t_3 - t_2)/2$ $t_2 = \min\{t_2, t_1 + t_3\}$ $t_3 = t_b + t_c$ $t_c = (t_2 + t_3 - t_1)/2$ $t_3 = \min\{t_3, t_1 + t_2\}$

Máximo flujo [Ak]

El problema puede ser descrito a través de una gráfica plana no dirigida G con dos terminales u , v y una capacidad no negativa c_e (t_e) asociada a cada arista $e \in E$. La solución consiste en obtener el máximo flujo de u a v tal que se conserve el flujo en cada vértice excepto en u y v , además el flujo en cada arista es menor o igual que la capacidad de la arista. Los pesos entonces se deberán modificar de acuerdo a la siguiente tabla:

Operación:	Fórmula:
Reducción en serie	$t_c = \min\{t_a, t_b\}$
Reducción en paralelo	$t_c = t_a + t_b$
Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$	$t_1 = (t_a + t_b - t_c)/2$ $t_a = t_1 + t_2$ $t_a = \min\{t_a, t_b + t_c\}$ $t_2 = (t_a + t_c - t_b)/2$ $t_b = t_1 + t_3$ $t_b = \min\{t_b, t_a + t_c\}$ $t_3 = (t_b + t_c - t_a)/2$ $t_c = t_2 + t_3$ $t_c = \min\{t_c, t_a + t_b\}$

Circuitos eléctricos [Bo, SR]

El problema puede ser descrito a través de una gráfica plana no dirigida G con dos terminales u , v donde los vértices representan puntos de conexión y las aristas contienen un peso r_e

(t_e) equivalente al valor de las resistencias para cada arista $e \in E$. Una posible aplicación permite conocer el valor de las resistencias entre los puntos u y v . Por lo tanto, se deberán de cumplir las siguientes ecuaciones:

Operación:	Fórmula:
Reducción en serie	$t_c = t_a + t_b$
Reducción en paralelo	$t_c = t_a t_b / (t_a + t_b)$
Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$	$t_1 = t_V / t_c$ $t_a = t_1 t_2 / t_\Delta$ $t_V = t_a t_b + t_b t_c + t_a t_c$ $t_2 = t_V / t_b$ $t_b = t_1 t_3 / t_\Delta$ $t_\Delta = t_1 + t_2 + t_3$ $t_3 = t_V / t_a$ $t_c = t_2 t_3 / t_\Delta$

Conteo de árboles generadores [CPV]

Un árbol T que sea una subgráfica de G ($T \subseteq G$) y que además cumpla que $V(T) = V(G)$ será llamado un árbol generador de G (ver Figura C-2). El problema consiste en calcular la cantidad de árboles generadores dada una gráfica G . Para la solución de este problema se requieren dos números reales, que serán los pesos i_e y o_e asociados a cada arista $e \in E$, llamados pesos de inclusión y exclusión respectivamente. Para cada árbol generador $T = (V, F)$ de G , se definirá el peso de T como:

$$w(T) = \prod_{e \in F} i_e \prod_{e \in E \setminus F} o_e \quad (\text{Ec. C-1})$$

Entonces, el peso total de la gráfica G se considerará como la suma de los pesos de todos los árboles generadores. Cuando $i_e = o_e = 1$ para toda arista $e \in E$, el peso total de G será

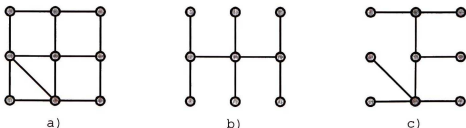


Figura C-2 Una gráfica original (a) junto con dos árboles generadores de ésta (b,c).

precisamente el número de árboles generadores de G . A continuación se describe como el peso total puede ser preservado al aplicar cada una de las seis operaciones básicas. Nótese que para cada arista $e \in E$ los pesos de inclusión y exclusión son multiplicados por un factor $m \neq 0$, el efecto en el peso total entonces será multiplicado por m . Por lo tanto una escala general S para G igual a $\prod_{e \in E} o_e$ puede ser mantenida (en el proceso, cada peso o_e es normalizado a uno, y cada peso i_e a i_e/o_e). El peso total de la gráfica normalizado de esta forma, obtiene la escala general, manteniendo el peso total de la gráfica original. Puesto que o_e siempre permanece normalizado a 1 (para toda e), en adelante se considera que el peso de la arista e está asociado sólo a i_e (t_e).

Entonces, se asumirá que para cada una de las siguientes reducciones en G se cuenta con una escala general d ; de tal forma que para la solución se considerarán las siguientes ecuaciones:

Operación:	Fórmula:
Reducción en serie	$t_c = \frac{t_a t_b}{t_a + t_b}, d = d(a+b)$
Reducción en paralelo	$t_c = t_a + t_b$
Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$	satisfaga:
	$d(t_a + t_b + t_c) = \delta$
	$dt_a t_b = \delta \gamma$
	$dt_a t_c = \delta \gamma$
	$dt_b t_c = \delta \beta$
	$dt_b t_c = \delta \alpha$
	$dt_a t_b t_c = \delta(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$
	donde:
	<p>G_Y es una gráfica con escala d, una vértice w de grado 3 (Y) con vértices adyacentes x, y, z mediante aristas e, f y g de pesos t_a, t_b y t_c respectivamente. Mientras que G_Δ es la misma gráfica que G_Y, pero el vértice w y las aristas e, f y g han sido sustituidas por una arista $e'=(y,z)$, $f'=(x,z)$ y $g'=(x,y)$ con pesos α, β y γ respectivamente, así como una escala general δ.</p>

Confiabilidad en redes [L]

Dada una gráfica plana no dirigida G con dos terminales u, v y una probabilidad de falla c_e (t_e) asociada a cada arista, el problema consiste en determinar la probabilidad de que los vértices terminales estén conectados por al menos un camino. Para el problema se considera que los nodos de la red no fallan y las aristas fallan independientemente una de la otra. Las ecuaciones para este problema serán:

Operación:	Fórmula:
Reducción en serie	$t_c = t_a t_b$
Reducción en paralelo	$t_c = t_a + t_b - t_a t_b$
Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$	para el conjunto abierto (borrado): $P_\Delta(a \rightarrow b) \equiv P_Y(a \rightarrow b)$ $P_\Delta(a \rightarrow c) \equiv P_Y(a \rightarrow c)$ $P_\Delta(b \rightarrow c) \equiv P_Y(b \rightarrow c)$ en términos de probabilidades: $t_1 + t_2 t_3 - t_1 t_2 t_3 = t_a t_b$ $t_2 + t_1 t_3 - t_1 t_2 t_3 = t_a t_c$ $t_3 + t_1 t_2 - t_1 t_2 t_3 = t_b t_c$ para el conjunto cerrado (contracción): $P_\Delta(a \rightarrow b c) \equiv P_Y(a \rightarrow b c)$ $P_\Delta(a \rightarrow c b) \equiv P_Y(a \rightarrow c b)$ $P_\Delta(b \rightarrow c a) \equiv P_Y(b \rightarrow c a)$ en términos de probabilidades: $t_1 + t_2 - t_1 t_2 = t_a t_b + t_b t_c - t_a t_b t_c$ $t_1 + t_3 - t_1 t_3 = t_a t_b + t_b t_c - t_a t_b t_c$ $t_2 + t_3 - t_2 t_3 = t_a t_c + t_b t_c - t_a t_b t_c$

donde $P_\Delta(a \rightarrow b)$ ($P_Y(a \rightarrow b)$) es la probabilidad de que a esté conectado a b en la estructura Δ (Y); mientras que, $P_\Delta(a \rightarrow b|c)$ ($P_Y(a \rightarrow b|c)$) representa la probabilidad de que a esté conectado a b ó c en esa misma estructura.

Lehman demostró que el límite ε definido para el error absoluto inducido después de la aplicación de una transformación basada en cualquiera de los dos conjuntos de ecuaciones dadas es:

$$\varepsilon = P_{\Delta}(a \rightarrow b \rightarrow c) - P_{\gamma}(a \rightarrow b \rightarrow c) \quad (\text{Ec. C-2})$$

que en términos de probabilidades sería:

$$\varepsilon = t_a t_b t_c - t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3 + 2t_1 t_2 t_3 \quad (\text{Ec. C-3})$$

Además, si se define *sdyo* (*syds*) como el signo de ε para la aproximación de la delta a la estrella (estrella a la delta) usando las ecuaciones para el conjunto abierto (cerrado), entonces las siguientes ecuaciones determinarán el signo del error:

$$\begin{aligned} sdyo &= 1 - t_1 - t_2 - t_3 + t_1 t_2 t_3 \\ syds &= 1 - t_a t_b - t_a t_c - t_b t_c + t_a t_b t_c \\ syds &= -sdyo \end{aligned} \quad (\text{Ec. C-4})$$

Apéndice D

Gráficas no planas ΔY -reducibles

Aunque en la actualidad no existe una caracterización de las gráficas ΔY -reducibles, Gitler [G1] brindó algunos avances en éste sentido al demostrar que dos familias de gráficas (la que no contiene a K_5 como menor y la que no contiene a $K_{3,3}$ como menor) lo son, tal y como se indicó en la *Introducción*.

Para su prueba Gitler definió un concepto al que llamó la **k-suma**; para facilitar la explicación se muestra sólo gráficamente (*Figura D-1.a*) en que consiste tal operación. Adicionalmente al concepto de k-suma, se emplean los siguiente lemas y teoremas:

Lema D-1 Las gráficas $K_{3,3}$, K_5 y V_8 (*Figura D-1.b*) son ΔY -reducibles.

Teorema D-1 Toda gráfica plana 2-conexa con 2 terminales es ΔY -reducible a una sola arista.

Teorema D-2 (Teorema I de Wagner) [G2] Toda gráfica conexa sin menores de K_5 puede ser obtenida por medio de k-sumas ($k=1,2,3$) a partir de gráficas planas y V_8 .

Teorema D-3 (Teorema II de Wagner) [G2] Toda gráfica conexa sin menores de $K_{3,3}$ puede ser obtenida por medio de

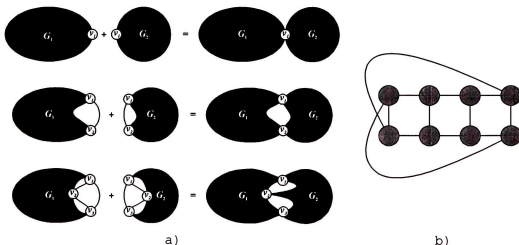


Figura D-1 (a) De arriba hacia abajo, una 1-suma, 2-suma y 3-suma, y (b) V_8

k -sumas ($k=1,2,3$) a partir de gráficas planas y K_5 .

Teorema D-4 Una gráfica plana 2-conexa con 3 terminales es ΔY -reducibile a una Δ con los tres vértices siendo los vértices terminales originales.

Teorema D-5 Una gráfica que no contenga a K_5 como menor es ΔY -reducibile.

Prueba: La prueba es por inducción. Si la gráfica es plana, entonces se puede emplear la prueba de Epifanov. Si la gráfica es V_8 entonces es reducibile por el Lema D-1. En caso contrario G es una k -suma de G_1 y G_2 , donde G_2 es una gráfica plana o V_8 . Se tienen varios casos dependiendo del grado de k .

Si $k=3$, cuando G_2 es plana, se pueden considerar los vértices v_1 , v_2 y v_3 de G_2 como las terminales y aplicar el Teorema D-5.

Si $k=2$, entonces existen dos casos dependiendo de si G_2 es plana o V_8 . Cuando G_2 es plana se puede suponer que los vértices v_1 y v_2 son los vértices terminales y reducirla como conclusión del Teorema D-1. De otra manera, G_2 es V_8 y el resultado se obtiene de el Lema D-1.

Si $k=1$, la conclusión se obtiene por el Lema D-1 si G_2 es V_8 y por la prueba de Epifanov si es plana.

Esto cubre todos los posibles casos y por lo tanto se ha finalizado la prueba. \square

Teorema D-6 Una gráfica que no contiene a $K_{3,3}$ como menor es ΔY -reducibile.

Prueba: Por el Lema D-1 se sabe que K_5 es reducibile y terminal reducibile para los casos con una y dos terminales. El Teorema D-1 cubre la reducibilidat de la gráfica plana con dos terminales. Por un argumento inductivo similar al de la prueba del Teorema D-5 (para $k=1$ y 2) la prueba se concluye. \square

Referencias

- [ACGP] D. Archdeacon, C. J. Colbourn, I. Gitler, J. S. Provan. Four Terminal Reducibility and Projective-Planar Wye-Delta-Wye Graphs, *J. Graph Theory*, por aparecer.
- [Ak] S. B. Akers Jr. The use of wye-delta transformations in network simplification. *Operations Research* 8 (1960), 311-323.
- [B] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press, Londres (1982).
- [Bo] B. Bollobas, *Graph Theory. An introductory Course*. Springer-Verlag, Nueva York, 1979.
- [BM] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Universidad de Waterloo (1978).
- [CFP] M. K. Chari, T. A. Feo, J. Scott Provan. The delta-wye approximation procedure for two-terminal reliability. *Operations Research* 44 (1996) 745-757.
- [CGM1] G. Calvillo, I. Gitler, J. Martínez-Bernal. Intercalate Matrices: I. Recognition of dyadic type. *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3) Vol. 3, 57-67 (1997).
- [CGM2] G. Calvillo, I. Gitler, J. Martínez-Bernal. Intercalate Matrices: II. A Characterization of Hurwitz-Radon Formulas and an Infinite Family of Forbidden Matrices. Por aparecer en *Bol. Soc. Mat. Mex.* (1997).
- [CGM3] G. Calvillo, I. Gitler, J. Martínez-Bernal. Intercalate Matrices: III. Geometric Study of Minimal Obstructions, preimpresión (1997).
- [CPV] C. J. Colbourn, J. S. Provan, D. Vertigan. Counting perfect matchings and spanning trees in planar graphs. Extended abstract, preimpresión (1990).

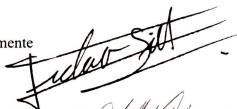
- [E] J. R. Edmonds, A Combinatorial representation for polyhedral surfaces, *Notices Amer. Math. Soc.*, 7, 646 (1960).
- [Ep] G. V. Epifanov. Reduction of a plane graph to an edge by a star-triangle transformation. *Soviet Math. Doklady* 166 (1966), 13-17.
- [FP] T. A. Feo y J. S. Provan. Delta-wye transformations ant the efficient reduction of two terminal planar graphs. *Operations Research* 41 (1993) 572-582.
- [G1] I. Gitler. Delta-Wye-Delta Transformations-Algorithms and Applications. Ph. D. Thesis, Universidad de Waterloo (1991).
- [G2] I. Gitler. Reduction of a Three Terminal Plane Graph to K_3 by Δ -Y Transformations, preimpresión, Universidad de Waterloo (1991).
- [Gr] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers, London (1967).
- [L] A. B. Lehman. Wye-delta transformations in probabilistic networks. *J. SIAM* 11 (1962), 773-805.
- [RS] N. Robertson y P. D. Seymour. Graph minors XX: Wagner's Conjecture, preimpresión (1988).
- [S] S. Stahl, Generalized embedding schemes, *J. Graph Theory* 2, 41-52 (1978).
- [SR] S. Seshu y M. B. Reed. *Linear graphs and electrical networks*. Addison-Wesley, Londres (1961).
- [T] K. Truemper. On the delta-wye reduction for planar graphs. *J. Graph Theory* 13 (1989), 141-148.
- [Tu] W. T. Tutte, *Graph Theory*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Volume 21. Addison Wesley, Menlo Park, California (1984).
- [W] H. M. K. Warkentyne. Δ -Y reduction. M. Math. Thesis, Universidad de Waterloo (1988).

- [Y] S. Yuzvinsky. Orthogonal Pairings of Euclidean Spaces. Michigan Math. J. 28 (1981).
- [Z] F. J. Zaragoza-Martínez. Coloraciones Mínimas de Matrices Intercaladas. Tesis de M. en C., CINVESTAV (1998).

Los abajo firmantes, integrantes de jurado para el examen de grado que sustentará el **Ing. Alejandro Flores Méndez**, declaramos que hemos revisado la tesis titulada:

“Transformada- Y, Matrices Intercaladas y Problema de Conocimiento Común” consideramos que cumple con los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Ciencias, con especialidad en Ingeniería Eléctrica.

Atentamente

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Isidoro Gitler", written over a horizontal line.

Dr. Isidoro Gitler Goldwain

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Guillermo Benito Morales Luna", written over a horizontal line.

Dr. Guillermo Benito Morales Luna

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Jorge Buenabad", written over a horizontal line.

Dr. Jorge Buenabad Chávez

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

BIBLIOTECA DE INGENIERIA ELECTRICA
FECHA DE DEVOLUCION

El lector está obligado a devolver este libro
antes del vencimiento de préstamo señalado
por el último sello.

04 MAR 2002

DEVOLUCION

